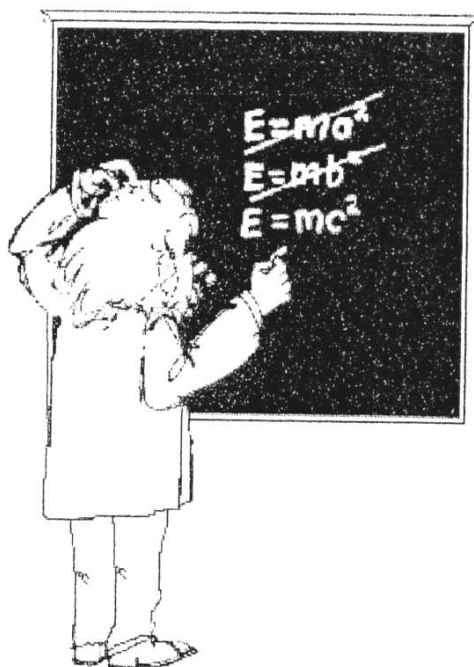




UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Instituto de Física

FÍSICA II - FAP 137
Instituto de Matemática e Estatística

*RELATIVIDADE RESTRITA
- TEORIA -*



RELATIVIDADE RESTRITA

por

Roberto Baginski Batista Santos

Créditos da versão impressa:

Editoração Eletrônica, Figuras e Ilustrações

Ivete C. Oppenheim

Maria de Lourdes Morais

Impressão: Gráfica do Inst. de Física - USP

1ª Impressão - 1999

2ª Impressão (com texto revisado) - 2000

3ª Impressão (revisada) - 2001

4ª Impressão - 2002

Créditos da versão eletrônica:

Editoração Eletrônica e Tratamento de Imagens

Paulo Renato Loffredo

Revisão

Olga Raga do Campo

A velocidade da luz é absoluta e os intervalos de espaços e tempo são relativos.

EINSTEIN
1905

$$a = \frac{F}{m} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{3/2}$$



Intervalos de espaço e tempo são absolutos e a velocidade da luz é relativa.

NEWTON
1686

$$a = \frac{F}{m}$$

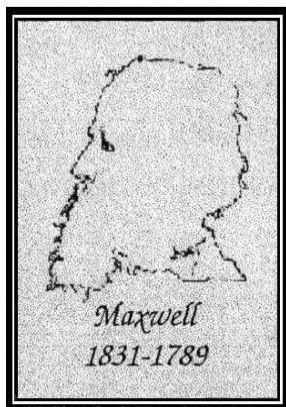
Sumário

Introdução.....	1
1. RELATIVIDADE DE GALILEU.....	2
2. A VIDA EM MEIO AO ÉTER.....	4
3.1 O EXPERIMENTO DE MICHELSON - MORLEY.....	5
3.2 ABERRAÇÃO DA LUZ ESTELAR.....	8
3.3 CONTRAÇÃO DE COMPRIMENTO DE LORENTZ - FITZGERALD.....	9
3.4 DILATAÇÃO DO TEMPO.....	10
4.1 POSTULADOS DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN.....	12
4.2 SIMULTANEIDADE.....	13
4.3 COMO CONSTRUIR UM SISTEMA DE REFERÊNCIA.....	14
4.4 TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ.....	16
4.5 CONTRAÇÃO DE COMPRIMENTO DE LORENTZ-FITZGERALD.....	21
4.6 DILATAÇÃO DO TEMPO.....	23
4.7 A LONGA VIDA DO MÉSON μ	26
4.8 ABERRAÇÃO RELATIVÍSTICA DA LUZ ESTELAR.....	27
4.9 EFEITO DOPPLER.....	28
4.10 PARADOXO DA CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO?.....	30
4.11 PARADOXO DOS GÊMEOS?.....	32
4.12 CAUSALIDADE E INVERSÃO DA ORDEM TEMPORAL DOS EVENTOS.....	32
4.13 ADIÇÃO DE VELOCIDADES.....	34
5.1 MOMENTO LINEAR.....	36
5.2 A 2ª LEI DE NEWTON.....	38
5.3 ENERGIA.....	39
5.4 COLISÃO INELÁSTICA: UM EXEMPLO DA CONVERSÃO DE ENERGIA EM MASSA.....	42
5.5 TRÊS IDENTIDADES ÚTEIS.....	42
5.6 PARTÍCULAS DE MASSA NULA.....	43
5.7 UNIDADES.....	44
5.8 SISTEMAS LIGADOS.....	45
6. LEITURA ADICIONAL.....	47
Agradecimentos.....	48

Introdução

No final do século XIX os problemas fundamentais da física pareciam resolvidos: a mecânica e a gravitação de Newton regiam o movimento dos corpos celestes e terrestres, os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos estavam unificados sob o eletromagnetismo de Maxwell, a termodinâmica era, em boa parte, responsável pela expansão industrial da época. Parecia justo esperar que as pequenas nuvens visíveis no horizonte estivessem logo dissipadas. Felizmente, tal expectativa não foi satisfeita.

Cada pequena nuvem desenvolveu-se em poderosa tormenta e após um quarto



de século o panorama da física estava radicalmente alterado. Uma nova concepção, a mecânica quântica, desvendava os segredos microscópicos da matéria e das interações e até mesmo nossas noções de espaço e de tempo tiveram de ser profundamente modificadas, inicialmente pela relatividade de Einstein e em seguida por sua gravitação.

A relatividade de Einstein prevê alguns fenômenos curiosos: uma barra de comprimento ℓ_0 terá seu comprimento reduzido para $\ell = \sqrt{1 - (v^2/c^2)} \ell_0$ quando estiver em movimento com velocidade $v < c$ (c é a velocidade de propagação da luz no vácuo); os relógios reduzem seu passo e o intervalo de tempo Δt_0 demora um intervalo de tempo $\Delta t = \Delta t_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ se o relógio estiver em movimento; quando um objeto de massa m_0 estiver em movimento sua massa aumentará para $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ e poderá ser convertida nas mais variadas formas de energia ($E = mc^2$). Todos esses fenômenos foram verificados experimentalmente ao longo dos anos e apesar da desconfiança com que a relatividade de Einstein foi inicialmente recebida em 1905 podemos dizer, hoje em dia, que poucas teorias físicas sobreviveram tão bem quanto a relatividade aos exaustivos testes a que foi submetida.

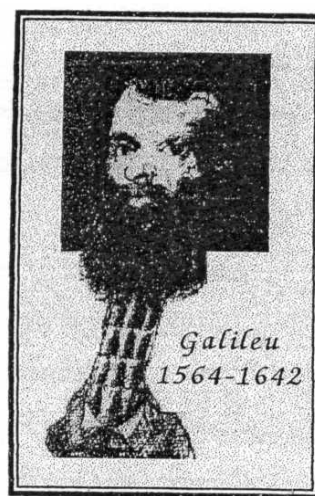
Estas notas devem fornecer uma breve introdução à relatividade de Einstein e apresentam material básico, identificado pela letra *A*. à margem da página, complementado por pequenas demonstrações, aplicações e extensões identificadas pela letra *B*. Aventure-se.

1. RELATIVIDADE DE GALILEU

Quando da publicação dos "Philosophiae Naturalis Principia Mathematica" ^B (Princípios Matemáticos da Filosofia Natural) em 1687 Isaac Newton tornou públicas suas três leis de movimento:

- I. Um corpo permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme a menos que uma força atue sobre si;
- II. Um corpo que sofre a ação de uma força move-se de modo tal que a taxa de variação temporal do momento linear seja igual à força;
- III. Se dois corpos exercerem forças um sobre outro estas serão iguais em magnitude e opostas em sentido.

A primeira destas leis, a Lei da Inércia ou o Princípio da Inércia, tem sua autoria atribuída a Galileu Galilei e estabelece que caso nenhuma força atue sobre um corpo este permanecerá em seu estado de movimento (repouso ou movimento retilíneo uniforme) mas é lícito perguntar, repouso ou movimento retilíneo uniforme em relação a quê?



Newton afirma, como resposta à pergunta, repouso ou movimento retilíneo uniforme em relação ao Espaço Absoluto, ao qual está associado o Tempo Absoluto. O Espaço e o Tempo Absoluto também eram chamados de Espaço e Tempo Absolutos e Verdadeiros. Seria possível detectar nosso estado de movimento absoluto em relação ao Espaço e ao Tempo Absolutos?

Galileu, alguns anos antes de Newton, já havia mostrado que não seria possível distinguir, por qualquer meio mecânico, entre um movimento retilíneo uniforme em relação aos Espaço e Tempo Absolutos e outro movimento retilíneo uniforme em relação a um sistema de referência que executa, também, algum movimento retilíneo uniforme em relação aos Espaço e Tempo Absolutos*. Em particular, repouso absoluto seria observado como movimento retilíneo uniforme em relação a qualquer sistema de referência que esteja, por sua vez, em movimento retilíneo uniforme em relação aos Espaço e Tempo Absolutos. Assim, um marinheiro que estivesse confinado a uma cabine sem janelas e que decidisse realizar uma série de

* Um sistema de referência que executa um movimento retilíneo uniforme em relação ao Espaço e ao Tempo Absolutos não são mais necessárias (por obra e graça da relatividade de Einstein) dizemos, contemporaneamente que um sistema inercial de referência é um em que vale o Princípio da Inércia de Galileu, ou seja, um corpo que não estiver sujeito a qualquer força estará em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação a um referencial inercial. Enunciada dessa maneira, a noção de sistema inercial de referência parece um tanto tautológica mas adquire grande sentido operacional a partir do momento em que somos capazes de identificar as possíveis causas de forças e neutralizá-las. A esse respeito vale a pena consultar H. M. Nussenzveig, "Mecânica (Curso de Física Básica, Vol. 1), cap. 4.

experiências mecânicas como, por exemplo, andar, saltar, deixar cair objetos ou arremessá-los em qualquer direção que lhe agradasse, observar o movimento de pêndulos ou de massas presas a molas sobre uma mesa ou pendentes do teto da cabine, atirar uma bola de bilhar contra a parede da cabine ou contra outra bola de bilhar ou realizar qualquer outra experiência mecânica com o objetivo de determinar se o navio está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação aos Espaço e Tempo Absolutos ou em relação a qualquer sistema inercial de referência fracassaria. Apesar da engenhosidade de nosso marinheiro o fato é que ele jamais conseguirá descobrir se está em movimento retilíneo uniforme ou em repouso realizando apenas experiências mecânicas. Precisando esta afirmação, o Princípio da Relatividade Galileana propõe que as leis que regem o movimento dos corpos sejam as mesmas em qualquer sistema inercial de referência.

Para tornar o Princípio da Relatividade Galileana mais palpável considere o caso simples do movimento de um corpo de massa m constante sob a ação de uma força $\vec{F}'$ no sistema inercial S' , que se move com velocidade $\vec{v} = v\hat{i}$ em relação ao sistema inercial S (ver Fig. 1). Para tornar tudo mais simples suporemos que os eixos Ox e $O'x'$, Oy e $O'y'$, Oz e $O'z'$ são paralelos entre si e que no momento em que as origens O e O' coincidiram as escalas de tempo foram sincronizadas em zero em ambos os sistemas. Já sabemos que um evento A que ocorre no instante de tempo t nas coordenadas (x, y, z) do sistema inercial S será descrito, no sistema S' , pelas coordenadas (x', y', z') e pelo instante de tempo t' , que se relacionam com seus congêneres do sistema S por meio das TRANSFORMAÇÕES DE GALILEU:

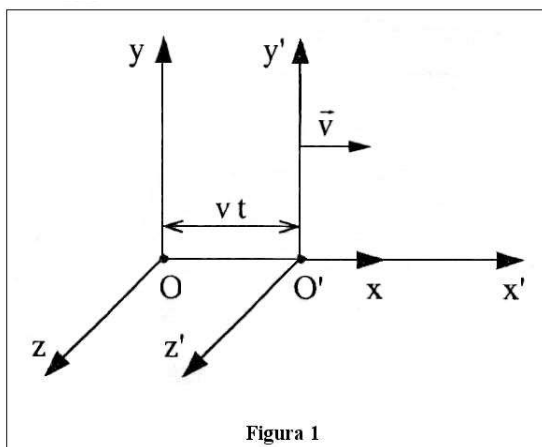


Figura 1

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (1.1)$$

As componentes do vetor velocidade $\vec{u}'$ do corpo em relação ao sistema inercial S' relacionam-se com as componentes da velocidade $\vec{u}$ em relação a S segundo a LEI

DE ADIÇÃO DE VELOCIDADES GALILEANA:

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{d}{dt}(x - vt) = \frac{dx}{dt} - v = u_x - v \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{dt} = u_y \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{dt} = u_z \end{aligned} \quad (1.2)$$

Por sua vez o vetor aceleração $\vec{a}'$ em relação a S' é idêntico ao vetor aceleração $\vec{a}$ em relação a S. Portanto, a 2ª Lei de Newton, que em S' pode ser escrita como

$$\vec{F}' = m \vec{a}' , \quad (1.3)$$

torna-se

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1.4)$$

no sistema inercial S, visto que a massa é a mesma nos dois sistemas inerciais. As equações (1.3) e (1.4) são um exemplo do que significa dizer que as leis de movimento têm a mesma forma em qualquer sistema inercial. Se em S pudermos escrever

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (1.5)$$

em S' poderemos escrever

$$\vec{F}' = m \vec{a}' \quad (1.6)$$

e nenhuma experiência mecânica será capaz de distinguir entre repouso ou movimento retilíneo uniforme em relação aos Espaço e Tempo Absolutos. De fato, nenhuma experiência mecânica será capaz de atribuir um papel especial a qualquer sistema inercial e as noções de Espaço e Tempo Absolutos só foram resgatadas no século XIX com o advento de uma concepção unificada da óptica, da eletricidade e do magnetismo, o eletromagnetismo de Maxwell.

2. A VIDA EM MEIO AO ÉTER

B

É impossível descobrir, por qualquer meio mecânico, se estamos em repouso ou em movimento retilíneo uniforme em relação ao Espaço e ao Tempo Absolutos. Existem, porém, fenômenos que não são de natureza mecânica e alguns destes já eram bem conhecidos na época de Galileu e de Newton: os fenômenos ópticos, elétricos e magnéticos.

A teoria óptica de Newton propunha que a luz fosse composta de pequenos corpúsculos e tentava, desse modo, explicar sua propagação em linha reta. Na França os físicos, sob inspiração da teoria dos vórtices de Descartes, propunham que a luz fosse uma forma de distúrbio capaz de propagar-se em algum meio material como as pequenas ondas que se formam na superfície de um lago.

O teste decisivo viria apenas no século XIX mas muito antes disto Newton já havia descoberto o fenômeno de interferência de luz, facilmente explicável pela hipótese da natureza ondulatória da luz, e sugeriu que era necessário atribuir à luz alguma forma de periodicidade (atributo natural de qualquer onda mas de difícil incorporação à teoria corpuscular da luz; no século XX, em parte graças a Einstein, o

atributo de periodicidade foi incorporado à teoria corpuscular da luz e os corpúsculos de luz são conhecidos como fótons)*.

Ainda assim, como compreender a propagação em linha reta senão pelo movimento de corpúsculos? Huygens mostrou que era possível e simples entender a propagação da luz em linha reta usando um princípio de composição de ondas que viria a ter seu nome.

No século XIX as evidências eram bastante claras: luz é onda. Todavia, toda experiência com ondas até então exigia que as ondas fossem propagadas em algum meio material: ondas sonoras no ar, ondas de água na água, ondas elásticas nos mais diversos meios elásticos. Era inconcebível que a luz não se propagasse em um meio material e sim no vazio. Este meio material foi chamado de éter e deveria ter propriedades quase contraditórias. Deveria ser muito rígido, para que a velocidade de propagação do distúrbio luminoso fosse altíssima** (299792458 m/s), mas também deveria ser arrastado com baixíssima resistência, para não interferir no movimento planetário, por exemplo. Ao longo do tempo os fenômenos elétricos e magnéticos foram sendo atribuídos ao éter, que foi se tornando cada vez mais estranho para acomodar toda a miríade de propriedades elétricas, magnéticas e ópticas. Por fim, em meados do século XIX, James C. Maxwell conseguiu formular uma teoria que congregava os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos, o eletromagnetismo, com base em uma teoria de éter muito sofisticada. Poucos anos depois, o mesmo Maxwell sugeriu que o eletromagnetismo sustentava-se independentemente do éter, bastando admitir a existência de campos, elétrico e magnético, que pudessem ser propagados no vácuo. A idéia não foi bem recebida: não era simples aceitar uma modificação tão profunda na visão - de - mundo Newtoniana, que tanto sucesso já havia tido, e abandonar a materialização do Espaço e do Tempo Absolutos e Verdadeiros, o éter.

3.1 O EXPERIMENTO DE MICHELSON - MORLEY

28

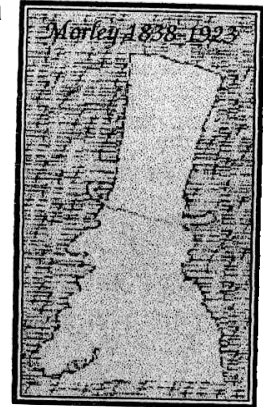
No século XIX o eletromagnetismo de Maxwell unificara os fenômenos elétricos, magnéticos e ópticos. A luz era vista como uma vibração coordenada de campos elétrico e magnético acoplados e propagava-se em um meio material chamado de éter, que estaria em repouso absoluto em relação ao Espaço e ao Tempo Absolutos

* Um relato acessível desse e de outros pontos está em R. P. Feynman, "QED: The Strange Theory of Light and Matter", Princeton University Press (1985).

** A velocidade da luz e o segundo podem ser medidos de modo tão acurado que, em 1983, a Conferência Geral de Pesos e Medidas definiu o metro como sendo igual à distância percorrida pela luz no vácuo em $1 / 299792458$ de um segundo. A partir de então a velocidade da luz passou a ser exatamente 299792458 m / s e as experiências para medi-la agora destinam-se a medir o metro.



de Newton. Uma consequência impressionante do eletromagnetismo de Maxwell é a previsão de que a luz seria propagada sempre com a mesma velocidade a despeito do estado de movimento, em relação ao éter, do sistema inercial no qual é observada. Essa previsão desrespeitava a Lei de Adição de Velocidades de Galileu, equações (1.2), e para evitar o conflito foi proposto que o eletromagnetismo de Maxwell seria válido apenas no sistema de repouso do éter, o Espaço e o Tempo Absolutos, sendo modificado nos outros sistemas inerciais. A conclusão é alvissareira: basta medir a velocidade da luz para descobrir nossa velocidade em relação ao éter.



A tentativa mais famosa de identificar nosso estado de movimento em relação ao éter foi o experimento conduzido por Michelson e por Morley em 1887. Luz vinda da fonte F na Fig. 2 (em um experimento prévio conduzido por Michelson em 1881 a fonte de luz estava na Terra, em 1887 Michelson e Morley usaram luz solar) atinge um espelho semi-transparente, no ponto P, e é separada em dois feixes que se dirigem aos espelhos S_1 e S_2 de onde são refletidos de volta em direção a P e daí para o telescópio T no qual são observadas possíveis franjas de interferência entre a luz que foi para S_1 e aquela

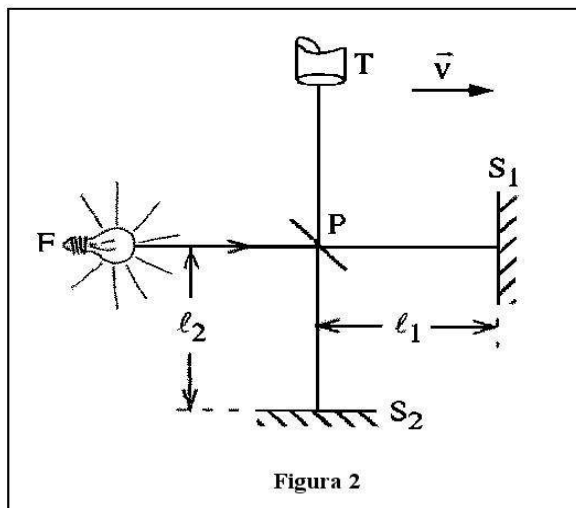


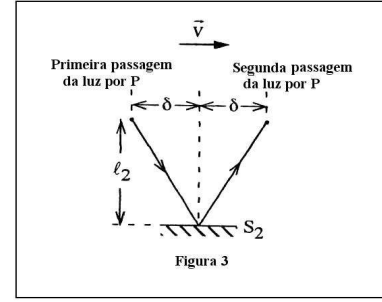
Figura 2

que foi para S_2 . A existência de franjas de interferência está diretamente ligada à diferença no caminho percorrido pela luz nos braços PS_1P e PS_2P do interferômetro. Por sua vez, diferenças no caminho da luz podem ser causadas por uma diferença nos comprimentos dos braços do interferômetro ou por uma diferença na velocidade da luz em cada um dos braços.

Para ser mais específico, suponha que o interferômetro mova-se, em relação ao éter, com velocidade v na direção do braço PS_1 . Assim, no caminho PS_1 a luz terá velocidade $c-v$ (c é a velocidade da luz no éter) e na volta (S_1P) $c+v$ e levará, para percorrer o trecho PS_1P , um intervalo de tempo igual a

$$\Delta t_1 = \ell_1 \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = 2 \frac{\ell_1}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2} \quad (3.1)$$

Como o braço PS_2P é perpendicular à velocidade do interferômetro em relação ao éter, a Lei de Adição de Velocidades de Galileu prevê que a luz será propagada com velocidade c . Ainda assim, é preciso levar em conta o fato de que o espelho semitransparente P ter-se-á movido uma distância δ enquanto a luz vai de P a S_2 e mais uma distância δ na volta de S_2 a P (Fig. 3). Vemos que δ é dado por



$$\frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + \ell_2^2}} = \frac{v}{c} \Leftrightarrow \delta = \frac{\ell_2 v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.2)$$

Para que o trecho PS_2P seja percorrido pela luz será preciso um intervalo de tempo

$$\Delta t_2 = \frac{2\sqrt{\delta^2 + \ell_2^2}}{c} = \frac{2\ell_2}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.3)$$

A diferença no caminho percorrido pela luz em cada braço do interferômetro será

$$\Delta = c(\Delta t_1 - \Delta t_2) = \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(\frac{\ell_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - \ell_2 \right) \quad (3.4)$$

É muito difícil construir braços de interferômetro de 10 metros de comprimento com a necessária precisão. Seria desejável que os papéis de ℓ_1 e de ℓ_2 em (3.4) fossem simétricos. Para isso Michelson e Morley giraram o aparato, que estava em uma pedra que flutuava sobre mercúrio, por 90° e os papéis de ℓ_1 e ℓ_2 foram trocados:

$$\Delta t'_1 = \frac{2\ell_1}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \Delta t'_2 = \frac{2\ell_2}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (3.5)$$

e

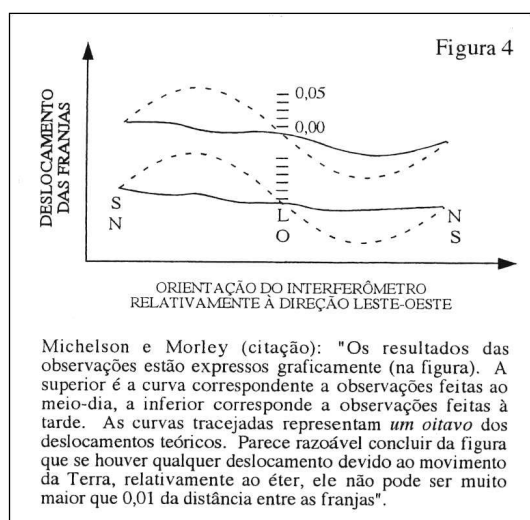
$$\Delta' = c(\Delta t'_1 - \Delta t'_2) = \frac{2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(\ell_1 - \frac{\ell_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \quad (3.6)$$

Se o comprimento de onda da luz que entra no interferômetro for λ , ao rodarmos o experimento por 90° o padrão de interferência será deslocado de n

franjas, com

$$n = \frac{\Delta' - \Delta}{\lambda} = \frac{2(\ell_1 + \ell_2)}{\lambda \sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \approx - \frac{(\ell_1 + \ell_2)}{\lambda} \cdot \frac{v^2}{c^2} , \quad (3.7)$$

pois $v / c \ll 1$ nos experimentos de Michelson e Morley. Na experiência de 1887 a luz usada no interferômetro era amarela ($\lambda \simeq 6,0 \times 10^{-7} \text{ m}$) e os braços do interferômetro possuíam, aproximadamente, 11 m cada. Se v fosse aproximadamente igual à velocidade orbital da Terra, 30 km/s, o deslocamento de franjas seria de 0,40 franjas. Michelson e Morley eram exímios interferometristas e apesar de seu aparato poder detectar, sem dificuldade, deslocamentos de 5



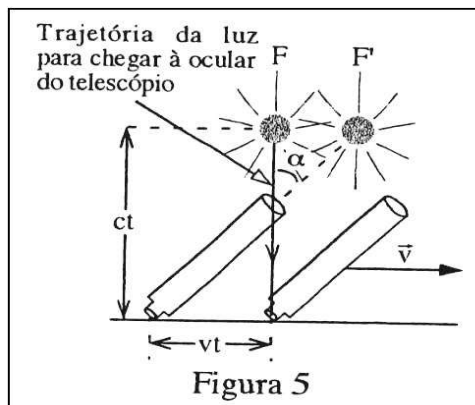
milésimos de franja (!) o resultado foi nulo: nenhum deslocamento foi observado e Michelson e Morley puderam afirmar que a velocidade da Terra em relação ao éter era inferior a 10 km/s (Fig. 4). Em outras palavras, a velocidade da luz era a mesma, tanto na Terra quanto no éter, e a Lei de Adição de Velocidades de Galileu necessitava de correções, pelo menos quando aplicada a fenômenos de altas velocidades, comparáveis à da luz.

3.2 ABERRAÇÃO DA LUZ ESTELAR

B

Uma forma de explicar o resultado nulo do experimento de Michelson - Morley era supor que o éter fosse localmente arrastado pela Terra em seu movimento pelo espaço. Nesse caso o interferômetro estaria em repouso em relação ao éter local e seria natural esperar que nada fosse detectado. Todavia, se a fonte de luz estivesse localizada fora da Terra tal explicação deixaria de valer. Na verdade, o conhecido fenômeno de aberração da luz estelar, facilmente explicado em termos da teoria do éter, não deveria ocorrer se o éter fosse arrastado pela Terra.

Na aberração da luz estelar um telescópio, como o da Fig. 5, que tente observar uma estrela no zênite, por exemplo, como a fonte F não deve ser apontado diretamente para a estrela mas deve ser levemente inclinado na direção aparente F' para compensar o efeito do avanço da Terra pelo éter com velocidade v. Pode-se mostrar que o ângulo α de inclinação deve ser dado por



$\alpha = \arctg(v/c) \cong 20,5''$, (3.8) para $v \cong 30\text{km} / \text{s}$. Esse resultado está em excelente acordo com a observação astronômica de Bradley (J. Bradley, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, 637 (1728); veja também Kittel, Knight, Ruderman, "Mecânica" (Curso de Física de Berkeley, Vol. 1, Cap. 10).

3.3 CONTRAÇÃO DE COMPRIMENTO DE LORENTZ - FITZGERALD

B



Lorentz e FitzGerald propuseram que todo corpo que estivesse em movimento pelo éter com velocidade v teria sua dimensão, na direção do movimento, contraída pelo fator $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Assim, no experimento de Michelson - Morley ℓ_1 deve ser substituído por $\ell_1^0 \sqrt{1-v^2/c^2}$, sendo ℓ_1^0 o comprimento do braço PS1P do interferômetro quando em repouso em relação ao éter. Como o outro braço do interferômetro é perpendicular à direção do movimento $\ell_2 = \ell_2^0$ e

$$\Delta = \frac{2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (\ell_1^0 - \ell_2^0) \quad (3.9)$$

Após rotação de 90° em todo aparato,

$$\Delta' = \frac{2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} (\ell_1^0 - \ell_2^0) = \Delta \quad (3.10)$$

E não há qualquer mudança no padrão de interferência ($n = 0$), conforme observado experimentalmente. Todavia, se o experimento for repetido com outra

velocidade v' do interferômetro em relação ao éter o resultado será

$$n = \frac{\ell_1^0 - \ell_2^0}{\lambda} \left(\frac{v'^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (3.11)$$

Apenas em 1926 Kennedy realizou o experimento (21 anos após a publicação da relatividade de Einstein), supondo que a velocidade do interferômetro em relação ao éter fosse dada por $\vec{v} = \sqrt{(\vec{v}_T + \vec{v}_R + \vec{v}_S)^2}$, com $\vec{v}_T$ a velocidade da Terra em relação ao Sol, $\vec{v}_R$ a velocidade de rotação da Terra e $\vec{v}_S$ a velocidade do Sol em relação às estrelas distantes. A cada doze horas esta quantidade é alterada por

$$\Delta v = \sqrt{4(\vec{v}_S + \vec{v}_T) \cdot \vec{v}_R} \quad (3.12)$$

e a cada seis meses por

$$\Delta v = \sqrt{4(\vec{v}_S + \vec{v}_R) \cdot \vec{v}_T} \quad (3.13)$$

O efeito previsto não foi observado mostrando que a hipótese de contração de Lorentz - FitzGerald não era correta. Veremos, porém, que há uma contração de Lorentz - FitzGerald na relatividade de Einstein. O que deve ficar claro é que a contração de Lorentz - FitzGerald não é, de modo algum, incorreta; incorretas são a teoria do éter e, possivelmente, as noções de Espaço e Tempo Absolutos.

3.4 DILATAÇÃO DO TEMPO

$\mathcal{B}$

A hipótese de contração do comprimento de um objeto em movimento em relação ao éter permitiu entender o resultado do experimento de Michelson - Morley sem abandonar nem a relatividade de Galileu nem as noções de éter ou de Espaço e Tempo Absolutos. Todavia, o eletromagnetismo de Maxwell estava sendo constantemente corroborado pelos mais diversos experimentos e ainda não se ajustava a relatividade de Galileu.

Segundo o eletromagnetismo de Maxwell a luz era uma forma de vibração eletromagnética regida por uma equação de onda da forma

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \quad (3.14)$$

A função φ representa qualquer uma das componentes dos vetores de campo elétrico $\vec{E}$ ou magnético $\vec{B}$ da onda eletromagnética. O Princípio da Relatividade de Galileu é o bastante para provar que, em quaisquer dos dois sistemas inerciais S e S', a *força* medida será a mesma, $\vec{F} = \vec{F}'$. Como a força elétrica sobre uma carga q é

dada por $\vec{F} = q \vec{E}$ segue-se que $\vec{E} = \vec{E}'$ e, portanto, $\varphi = \varphi'$.

Aplicando as transformações de Galileu, equações (1.1), obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -v \frac{\partial \varphi}{\partial x'} + \frac{\partial \varphi}{\partial t'} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2} - 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x' \partial t'} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t'^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x'^2}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

No sistema inercial S' a equação de onda (3.14) será escrita como

$$\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t'^2} - \frac{v^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2} + \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x' \partial t'} = 0\tag{3.16}$$

A equação de onda não manteve a forma quando transformada de um sistema inercial para outro. Isso significa que o eletromagnetismo não está satisfazendo o Princípio da Relatividade de Galileu.

A solução de Lorentz para o novo problema é semelhante àquela empregada no experimento de Michelson - Morley, qual seja, supor que os comprimentos que estiverem na direção do movimento em relação ao éter - representado pelo sistema inercial S - devem ser contraídos por um fator $\sqrt{1-v^2/c^2}$. Desta vez, porém, a solução ainda é insuficiente e Lorentz foi obrigado a postular um fenômeno novo, a dilatação - ou dilação - do tempo.

Na dilatação do tempo os instrumentos de medida de tempo registrariam, quando em movimento em relação ao éter, intervalos de tempo maiores por um fator $\sqrt{1-v^2/c^2}$ do que os intervalos de tempo medidos pelos relógios em repouso em relação ao éter. Assim,

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\tag{3.17}$$

e a equação de onda tem sua forma original restaurada no sistema S'. Dizemos que a equação é covariante sob o conjunto de transformações usadas.

Pela mesma época (primeiros anos do século XX) Henri Poincaré percebeu que as duas hipóteses de Lorentz, da contração do comprimento e da dilatação do tempo, modificavam de modo consistente as transformações de Galileu (equações 1.1) e conspiravam para impedir que qualquer movimento em relação ao éter fosse observado. Poincaré observou que "uma conspiração completa é, por

si só, uma lei da natureza" e propôs que a impossibilidade de detectar movimento absoluto em relação ao éter fosse tornada uma nova lei da natureza. Verdadeiro esclarecimento sobre o significado físico dessa nova lei da natureza viria apenas em 1905, com a publicação de um artigo intitulado "Zur Elektrodynamik bewegter Körper" (Sobre a Eletrodinâmica de Corpos em Movimento) nos *Annalen der Physik* 17, 891 (1905), por parte de um jovem físico e examinador do escritório Suíço de patentes em Berna, Albert Einstein.

4.1 POSTULADOS DA RELATIVIDADE DE EINSTEIN

A

A tentativa de estender a visão-de-mundo própria da mecânica de Newton ao eletromagnetismo de Maxwell levou a sérias dificuldades que só puderam ser contornadas com hipóteses arbitrárias capazes de desfigurar tanto a mecânica quanto o eletromagnetismo.

Sabia-se que a mecânica de Newton dava conta de todos os fenômenos que envolviam baixas velocidades mas que havia problemas em descrever o único fenômeno de alta velocidade conhecido, a propagação da luz. Por outro lado, o eletromagnetismo de Maxwell descrevia os fenômenos ópticos com perfeição. Por que não manter o eletromagnetismo inalterado e modificar o que fosse necessário na mecânica para que esta fosse compatível com as previsões do eletromagnetismo? Foi exatamente isso que Einstein propôs em 1905, ao ampliar o raio de ação do Princípio da Relatividade e eleger uma das mais impressionantes consequências do eletromagnetismo como bases de uma nova compreensão da natureza expressa em dois postulados, o PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE e a LEI DE PROPAGAÇÃO DA LUZ.

Eis o PRINCÍPIO DA RELATIVIDADE de Einstein:



TODOS OS SISTEMAS INERCIAIS SÃO EQUIVALENTES PARA A FORMULAÇÃO DE TODAS AS LEIS DA NATUREZA.

Uma consequência imediata do Princípio da Relatividade de Einstein é a abolição do éter como sistema inercial privilegiado. Sem ter outro papel a cumprir, a noção de éter acabou por desfazer-se.

O segundo passo de Einstein foi elevar um fato experimentalmente verificado à condição de postulado básico da teoria:

A LUZ PROPAGA-SE, NO VÁCUO, DE MODO RETILÍNEO E COM A MESMA VELOCIDADE c EM TODOS OS TEMPOS, EM TODAS AS DIREÇÕES E EM TODOS OS SISTEMAS INERCIAIS, A DESPEITO DO ESTADO DE MOVIMENTO DA FONTE DE LUZ.

O segundo postulado afirma, em particular, que a despeito do quão rápido nos aproximemos ou afastemos de um sinal luminoso este sempre terá a mesma velocidade c em relação a nós. Einstein percebeu que esta consequência elementar da LEI DE PROPAGAÇÃO DA LUZ exige que nossas noções de Espaço e Tempo sejam seriamente revistas.



4.2 SIMULTANEIDADE

A

Devemos levar em conta que todos os juízos nos quais o tempo tenha algum papel são, sempre, juízos de eventos simultâneos. Quando digo, por exemplo, que "o trem chega aqui às sete horas" quero dizer algo como "a sobreposição do ponteiro pequeno do meu relógio sobre o algarismo sete e a chegada do trem são eventos simultâneos".

O parágrafo acima é um excerto do artigo de 1905 de Albert Einstein publicado nos *Annalen der Physik* e ilustra a importância da noção de simultaneidade de eventos na descrição que fazemos da natureza.

Uma boa forma de definir, em termos operacionais, a ocorrência simultânea de dois eventos é dizer que os eventos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, que ocorrem nos pontos P e Q de um sistema inercial S serão simultâneos em S se e somente se luz emitida quando da ocorrência dos dois eventos chegar simultaneamente ao ponto médio M do segmento PQ em S . Não há problema em saber se dois eventos que acontecem no mesmo ponto são simultâneos ou não. A definição apresentada permite estender a noção de simultaneidade para eventos que acontecem afastados um do outro.

Suponha que dois eventos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, que acontecem nos pontos P e Q do sistema

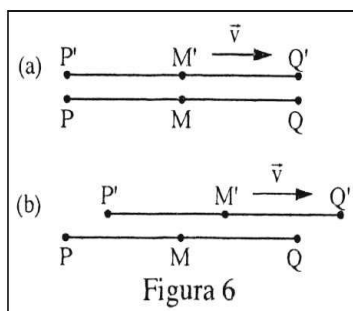


Figura 6

inercial S , sejam simultâneos. Por seu turno, S' é um sistema inercial que se move na direção PQ com velocidade v e nele P' e Q' são os pontos em que os eventos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ ocorrem, enquanto M' é o ponto médio do segmento $P'Q'$. A situação, tal como vista de S , é mostrada na Fig. 6; a parte (a) da figura retrata a

A

situação no instante em que o evento $\mathcal{P}$ ocorreu enquanto a parte (b) é um retrato do que acontecia quando a luz vinda do ponto P chegou ao ponto médio M do segmento PQ .

Uma vez que os eventos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são simultâneos em S a luz que vem dos pontos P e Q chegará simultaneamente em M . Como a luz leva um certo tempo entre sua emissão e sua chegada ao ponto M , os dois pontos médios M e M' não mais coincidirão quando a luz chegar a M . Os dois sinais luminosos, vindos de P e de Q , não podem se encontrar tanto em M quanto em M' e portanto concluímos que a simultaneidade de eventos em S não leva, necessariamente, à simultaneidade de eventos em S' . *A noção de Tempo Absoluto é incompatível com tal conclusão e daí vem a necessidade de revisão de nossas concepções de Espaço e Tempo.*



4.3 COMO CONSTRUIR UM SISTEMA DE REFERÊNCIA

A

É sempre possível escrever as leis da natureza sem fazer menção a qualquer sistema de referência. Assim, $\vec{F} = m\vec{a}$ não traz qualquer indicação do sistema de referência em que medimos a força, a massa ou a aceleração. Todavia, é importante poder aplicar uma lei da natureza a alguma situação específica e, nesse caso, a construção de um sistema de referência é valiosa. A relatividade de Einstein ensina a ser bastante cuidadoso nesse processo.

Uma das formas de construir um sistema de referência é reunir um grupo de pessoas, os observadores, que estejam em repouso entre si. Cada uma dessas pessoas é responsável por registrar as coordenadas, espaciais e temporais (espaçotemporais, pois veremos que espaço e tempo estão bem mais unidos agora do que estavam na relatividade de Galileu), de qualquer evento que aconteça em sua vizinhança. Para tal, é preciso que cada um dos observadores saiba sua posição em relação a uma origem arbitrariamente escolhida e tenha um relógio que esteja sincronizado com os relógios de seus colegas.

O primeiro passo é escolher a origem O do sistema. Em seguida, escolhem-se três direções mutuamente ortogonais para representar os eixos cartesianos Ox , Oy e Oz . Com isso, cada observador é capaz de determinar os valores dos ângulos polar θ e azimutal φ que caracterizam a linha que o liga a origem. Para determinar sua distância à origem cada observador deve enviar um pulso de luz em direção a um espelho na origem e medir o intervalo de tempo Δt necessário para que a luz retorne. Como - essa é a Lei de Propagação da Luz - a luz sempre é propagada com velocidade c (no vácuo) a distância de cada observador à origem será $\Delta tc/2$. Isso é suficiente para que cada observador saiba o valor de suas coordenadas x , y e z .

Agora, é preciso sincronizar os relógios de todos os observadores de um mesmo sistema de referência. Uma forma de fazê-lo é combinar que no instante de tempo $t = 0$, marcado no relógio do observador que estiver na origem, este enviará um pulso esférico de luz - basta acender uma lâmpada - que se propagará e será detectado por todos os observadores do sistema de referência. Para que este pulso chegue a um observador A situado a uma distancia D da origem será necessário esperar um intervalo de tempo D / c . Assim, no momento em que o observador A receber o pulso de luz o relógio do observador na origem estará marcando D / c . Para que os relógios sejam sincronizados o observador A deve, ao receber o pulso de luz, ajustar seu relógio para o instante de tempo D / c . Se todos seguirem esse procedimento seus relógios estarão sincronizados.

Deve-se notar que o método descrito pode ser usado tanto em sistemas inerciais quanto em sistemas não-inerciais mas que haverá problemas caso outro grupo de observadores, em movimento em relação ao grupo original, tente usar os sinais de luz do grupo original sem atentar para o movimento relativo entre os dois grupos.

Pode ser útil calcular a falta de sincronia que os observadores de um sistema inercial atribuirão aos relógios dos observadores de outro sistema inercial. Suponha que a distância entre os pontos P e Q da Fig. 6 seja ℓ e que na situação da Fig. 6a um pulso de luz seja emitido do ponto M no instante $t = 0$. Não há duvida quanto à distância que separa o ponto M dos pontos P' e Q' segundo os observadores de S, $\ell/2$ (note que na situação da Fig. 6a os pontos P, P' e Q, Q' são coincidentes). Quando a luz chegar ao ponto P no instante $t_{P'}$, este estará um pouco à direita do ponto P e a luz precisará percorrer apenas $ct_{P'} = \ell/2 - vt_{P'}$. Ao chegar ao ponto Q' no instante $t_{Q'}$ a luz terá percorrido $ct_{Q'} = \ell/2 + vt_{Q'}$,

Assim,

$$t_{P'} = \frac{\ell/2}{c+v} \text{ e } t_{Q'} = \frac{\ell/2}{c-v}$$

E os relógios dos observadores P' e Q' estarão fora de passo, segundo os observadores do sistema S, por uma quantidade dada por

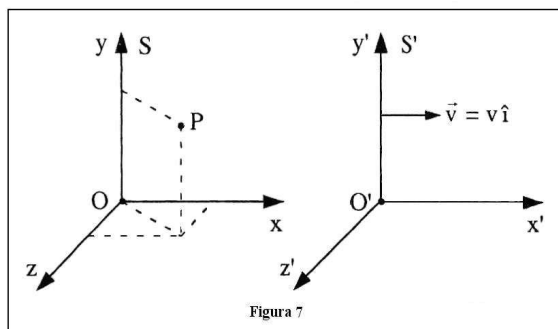
$$t_{Q'} - t_{P'} = \frac{\ell v / c^2}{1 - v^2 / c^2}$$

4.4 TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ

A capacidade de comunicar e comparar os resultados dos mais diversos experimentos é um dos pilares tanto do método científico de investigar a natureza quanto do desenvolvimento tecnológico. É de vital importância saber como a descrição de uma seqüência de eventos feita pelos observadores de um sistema inercial difere da descrição da mesma seqüência de eventos feita pelos observadores de outro sistema inercial. Mais adiante (seção 4.12) veremos que os observadores de dois sistemas inerciais distintos não precisam concordar nem mesmo com a ordem temporal de uma seqüência de eventos, desde que tais eventos aconteçam em pontos suficientemente distantes.

Como as coordenadas atribuídas a um evento P pelos observadores do sistema inercial S são transformadas para as coordenadas atribuídas ao mesmo evento P pelos observadores do sistema inercial S' ? A melhor forma de responder a essa questão é considerar o comportamento da luz, visto que sua propagação é assunto de um dos postulados da relatividade de Einstein. Por enquanto, nada sabemos sobre o comportamento de elétrons, automóveis ou réguas mas sabemos que em todos os sistemas inerciais a luz se propaga com a mesma velocidade c , a despeito do estado de movimento da fonte de luz.

No instante de tempo $t = 0$ um pulso de luz é emitido da origem O do sistema inercial S . Para simplificar a análise admita que nesse exato instante a origem O' do sistema inercial S' coincida com a origem O de S e que os relógios usados para medir o tempo em S e aqueles usados em S' sejam todos acertados de modo a indicar $t=0 = t'$ quando as origens O e O' estiverem sobrepostas. Além disso, os eixos Ox e $O'x'$, Oy e $O'y'$, Oz e $O'z'$ são paralelos dois a dois. Por fim, o sistema S' move-se com velocidade constante $\vec{v} = v\hat{i}$ em relação a S . A essa configuração, mostrada na Fig. 7, chamamos *configuração padrão*.



O pulso de luz emitido nas coordenadas espaçotemporais $(x = 0, y = 0, z = 0, t = 0)$ em S e $(x' = 0, y' = 0, z' = 0, t' = 0)$ em S' atingirá o ponto P de coordenadas (x, y, z) no tempo t , segundo os observadores de S , caracterizando o evento P . Segundo os observadores de S' , o mesmo evento tem coordenadas (x', y', z', t') . Qual a relação entre as coordenadas (x', y', z', t') e as coordenadas (x, y, z, t) ?

A Lei de propagação da Luz permite escrever uma equação para localizar

$\mathcal{B}$

os pontos pertencentes a frente de onda esférica do pulso de luz, tanto no sistema S,

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad , \quad (4.1)$$

quanto no sistema S',

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2 \quad . \quad (4.2)$$

O significado de cada equação é simples: no sistema S(S') a luz expande-se esfericamente com velocidade c e gasta um tempo t (t') para atingir o ponto P situado a uma distância $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ($\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$) da origem O (O') na qual estava a fonte de luz.

Como as leis da natureza são as mesmas em qualquer sistema inercial e como a Lei de Propagação da Luz é uma lei da natureza é preciso que

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = a(x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) \quad , \quad (4.3)$$

sendo a uma constante independente da velocidade $\vec{v}$ entre os sistemas inerciais. No caso trivial em que $|\vec{v}|=0$ as coordenadas dos pontos da frente de onda do pulso de luz são as mesmas tanto em S quanto em S' (na verdade, S é idêntico a S') e a equação (4.3) deve ser uma identidade trivial,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = (x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2) \Rightarrow a=1 \quad (4.4)$$

Como a é independente da velocidade seu valor será sempre 1 e a equação (4.3) torna-se

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 \quad (4.5)$$

O Princípio da Relatividade exige que uma partícula em movimento retilíneo uniforme em relação a S esteja também em movimento retilíneo uniforme em relação a S'. Para tal, é preciso que a transformação de coordenadas seja linear*.

As transformações entre as coordenadas espaciais perpendiculares à direção de movimento relativo entre os sistemas S e S' são simplesmente

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad . \quad (4.6)$$

Para convencer-se disso, suponha que duas réguas R e R' idênticas, uma sobre o eixo Oy e outra sobre o eixo O'y', estejam ambas com sua extremidade inferior sobre a origem do sistema inercial no qual a respectiva régua está em repouso, como mostra a

* Convença-se disso com uma transformação não-linear da forma $x' = x - vt + \alpha t^2$. Se em S o movimento retilíneo uniforme de uma partícula é descrito por $x = vt$, em S' o movimento da partícula será descrito por $x' = \alpha t^2$, que não é característico de um movimento retilíneo uniforme. Nesse caso, S' não é um sistema inercial.

Fig. 8a.

Se o movimento causar, por exemplo, a diminuição do comprimento da régua os observadores de S dirão que a régua R' é menor do que a régua estacionária R (Fig. 8b). Se as extremidades das réguas possuírem pequenas lâminas uma marca indelével será deixada pela régua R' sobre o corpo da régua R.

O Princípio da Relatividade garante que os observadores de S' dirão que a régua móvel R é mais curta do que a régua estacionária R' (Fig. 8c). Uma marca indelével será deixada por R sobre o corpo de R'.

Há uma única forma de explicar como R' pode marcar R (segundo os observadores de S) ao mesmo tempo em que R marca R' (segundo os observadores de S'). É preciso que as duas réguas,

uma móvel e outra estacionária segundo os dois conjuntos de observadores, tenham o mesmo comprimento. Assim, as coordenadas espaciais perpendiculares à direção do movimento relativo não são alteradas.

Para as coordenadas x' e t' temos

$$ct' = \alpha x + \beta ct$$

$$x' = \gamma x + \delta ct \quad (4.7)$$

Se $v = 0$ devemos encontrar

$$\begin{aligned} ct' &= ct \\ x' &= x \end{aligned} \quad (4.8)$$

e portanto as funções $\alpha(v)$, $\beta(v)$, $\gamma(v)$ e $\delta(v)$ valem, para $v = 0$,

$$\begin{aligned} \beta(0) &= 1 = \gamma(0) \\ \alpha(0) &= 0 = \delta(0) \end{aligned} \quad (4.9)$$

As transformações inversas das equações (4.7) são

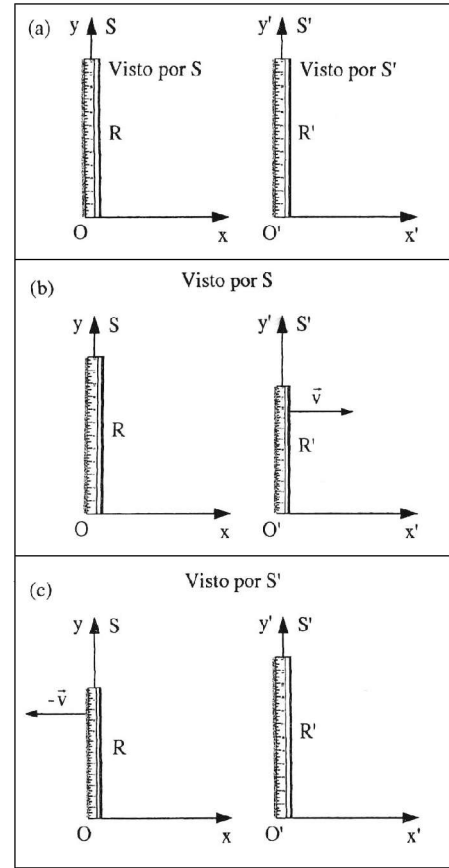


Figura 8

B

$$ct = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} (\alpha x' - \gamma ct') \quad (4.10)$$

$$x = \frac{1}{\alpha\delta - \gamma\beta} (-\beta x' + \delta ct')$$

e devemos exigir que $\alpha\delta - \gamma\beta \neq 0$.

A origem O' de S' (com velocidade $dx'/dt' = 0$ em S') tem velocidade $dx/dt = v$ em relação a S e portanto

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} \frac{dt'}{dt} = \frac{dx}{dt'} \left(\frac{dt}{dt'} \right)^{-1} = \frac{\delta c}{\alpha\delta - \gamma\beta} \left(\frac{-\gamma c}{\alpha\delta - \gamma\beta} \right)^{-1} = -\frac{c\delta}{\gamma} \quad (4.11)$$

Da mesma forma a origem O de S (com velocidade $dx/dt = 0$ em S) tem velocidade $dx'/dt' = -v$ em relação a S' e portanto,

$$-v = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{dx'}{dt} \left(\frac{dt'}{dt} \right)^{-1} = \frac{c\delta}{\beta} \quad (4.12)$$

Ao comparar (4.11) e (4.12) encontramos $\beta(v) = \gamma(v)$.

Quando as informações disponíveis sobre as transformações de coordenadas são reunidas e substituídas na equação (4.5) e os coeficientes dos termos $c^2 t^2$, x^2 e $c x t$ comparados, obtemos

$$\begin{aligned} \beta^2 - \delta^2 &= 1 \\ \gamma^2 - \alpha^2 &= 1 \\ \alpha\beta - \gamma\delta &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

e como $\beta = \gamma$,

$$\alpha = \delta = \frac{-v\gamma}{c} \quad (4.14)$$

$$\boxed{\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}}; \quad (4.15) \quad \mathcal{A}$$

$\gamma(v)$ é chamado o FATOR DE LORENTZ e nunca é menor do que 1.

As transformações entre as coordenadas de um evento no sistema S e no sistema S' são

$$\begin{array}{l}
t' = \gamma(v) \left(t - \frac{vx}{c^2} \right) \\
x' = \gamma(v) (x - vt) \\
y' = y \\
z' = z
\end{array}
\quad (4.16)$$

As transformações encontradas são chamadas TRANSFORMAÇÕES DE LORENTZ e são consequência imediata dos dois postulados de Einstein. As transformações de Lorentz são a solução mais simples (com exceção da solução trivial $v = 0$) do problema de relacionar as coordenadas de dois sistemas inerciais de maneira tal que um pulso esférico de luz com velocidade c no outro sistema.

É uma tarefa simples inverter as transformações de Lorentz. Esqueça as equações (4.10) e use a profunda simetria que há entre um sistema inercial S' com velocidade v em relação a S e o sistema S , que se move com velocidade $-v$ em relação a S' . Assim

$$\begin{array}{l}
t = \gamma(v) \left(t' + \frac{vx'}{c^2} \right) \\
x = \gamma(v) (x' + vt') \\
y = y' \\
z = z'
\end{array}
, \quad (4.17)$$

bastando trocar os papéis das coordenadas de S e de S' e inverter o sentido (e o sinal) da velocidade nas transformações de Lorentz.

Quando a velocidade relativa v é pequena em comparação à velocidade da luz c ($v/c \ll 1$) o fator de Lorentz $\gamma(v)$ tende a unidade e às transformações de Lorentz (4.16) tornam-se

$$\begin{array}{l}
ct' \simeq ct - \frac{v}{c} x \\
x' \simeq x - \frac{v}{c} ct \\
y' = y \\
z' = z
\end{array}
, \quad (4.18)$$

que são muito parecidas com as transformações de Galileu da física de Newton (equações (1.1)). A diferença, o termo $-\frac{v}{c}x$, seria responsável pela falta de

sincronia entre relógios em movimento, mas, nos experimentos possíveis até a metade do século XIX a quantidade ct é geralmente muito maior do que $\frac{v}{c}x$. Nessas condições é impossível detectar algum desvio apreciável da noção de Tempo Absoluto e, na prática, $t' \cong t$. Isso explica o enorme sucesso da física de Newton, que por dois séculos lidou com fenômenos em baixas velocidades e em situações nas quais $t' \cong t$.

4.5 CONTRAÇÃO DE COMPRIMENTO DE LORENTZ-FITZGERALD

A

No sistema inercial S' há uma barra em repouso ao longo do eixo $O'x'$. Como a barra está em repouso não é preciso medir as coordenadas de posição de seus extremos, x'_1 e x'_2 , de modo simultâneo em S' . O comprimento da barra, segundo os observadores de S' , é

$$L_0 = x'_2 - x'_1 \quad (4.19)$$

e é chamado o COMPRIMENTO PRÓPRIO, OU DE REPOUSO, DA BARRA.

Por outro lado, o sistema S' (e com ele, a barra) move-se com velocidade $\vec{v} = v \hat{i}$ em relação ao sistema inercial S . Nesse sistema é mais complicado medir o comprimento da barra móvel. Agora, é preciso cuidar para que as medidas das coordenadas dos extremos da barra sejam feitas simultaneamente (simultaneamente em S : já vimos que na relatividade de Einstein a simultaneidade de eventos depende do sistema inercial em que as medidas são feitas). A definição do comprimento L da barra em S é*

$$L = x_2(t) - x_1(t). \quad (4.20)$$

Para relacionar os comprimentos L_0 e L basta aplicar as transformações de Lorentz (4.16),

$$\begin{aligned} x'_2 &= \gamma(v) [x_2(t) - vt] \\ x'_1 &= \gamma(v) [x_1(t) - vt] \end{aligned} \quad (4.21)$$

e calcular

$$L_0 = x'_2 - x'_1 = \gamma(v) [x_2(t) - x_1(t)] = \gamma(v) L \quad (4.22)$$

* Como os relógios dos observadores de S estão sincronizados, basta que combinem que os observadores que estiverem mais próximos das extremidades da barra em um dado horário previamente estabelecido registrem a posição de cada extremidade. Esse é o modo mais simples de fazer observações simultâneas.

Assim, os observadores de S dirão que *a barra em movimento possui comprimento*

$$L = \frac{L_0}{\gamma(v)} = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2} \quad (4.23)$$

menor do que o comprimento próprio L_0 atribuído à barra pelos observadores de S' , que estão em repouso em relação à barra (ver Fig. 9).

Um fenômeno parecido com esse foi aventado como possível explicação do resultado negativo do experimento de Michelson - Morley por Lorentz e FitzGerald uma década antes da relatividade de Einstein (v. seção 3.3) como tentativa de salvar a noção de éter. Lá, L_0 era o comprimento que a barra teria se estivesse em repouso

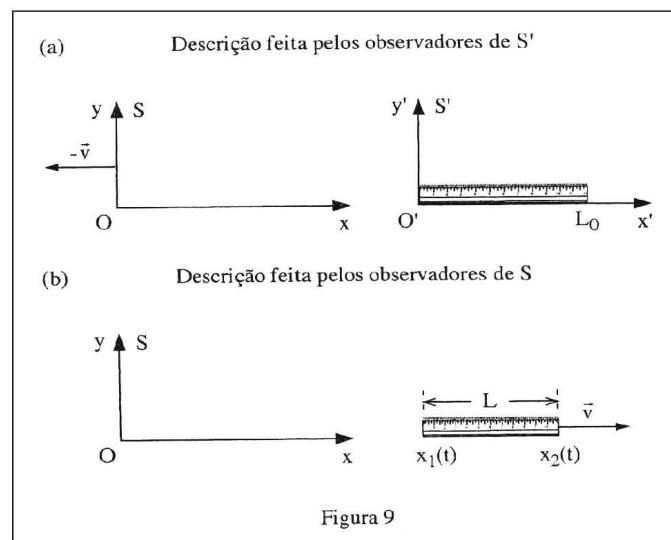


Figura 9

em relação ao éter. Aqui, o fenômeno é simétrico: se os observadores de S' medirem o comprimento L de uma barra de comprimento próprio L_0 que esteja em repouso em relação a S descobrirão que $L = L_0 / \gamma(v)$. A barra em movimento é sempre menor do que a mesma barra em repouso mas não há contradição alguma: a simultaneidade no sistema S difere da simultaneidade no sistema S' .

Para apreciar o papel da simultaneidade das medidas dos extremos $X_2(t)$ e $X_1(t)$ considere o seguinte experimento feito para tentar medir o comprimento da barra em movimento. Dois relógios são colocados cada qual em uma das extremidades da barra e sincronizados em S' , sistema no qual a barra está em repouso. No instante de tempo $t' = 0$ cada um deles emite um fecho de luz na direção $O'y'$. Os fechos de luz são captados por dois detectores de uma série de detectores espalhados sobre o eixo Ox do sistema S . A distância entre esses dois detectores será a diferença entre as posições

$$x_1 = \gamma(v)(x'_1 + vt') = \gamma(v)(0 + v \cdot 0) = 0 \quad (4.24)$$

$$x_2 = \gamma(v)(x'_2 + vt') = \gamma(v)(L_0 + v \cdot 0) = \gamma(v)L_0$$

dos detectores e será

$$x'_2 - x'_1 = \gamma L_0 = \frac{L_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.25)$$

A diferença entre esse resultado e o resultado correto (eq. 4.23) está no fato de que agora tentamos medir o comprimento da barra móvel, para observadores de S, usando a simultaneidade em S' da emissão de luz nos extremos da barra enquanto anteriormente a medida foi feita levando em conta a simultaneidade tal como definida em S. Os observadores de S dirão que o fecho de luz da extremidade da frente da barra foi disparado $\gamma(v) vL_0 / c^2$ depois do disparo do primeiro fecho. É claro, então, que a extremidade da frente estará mais à frente do que deveria e que a medida não terá sido feita corretamente, pois a barra está em movimento.

Quando medimos o comprimento de uma barra que esteja disposta perpendicularmente em relação a direção de seu movimento nada acontece, pois $y' = y$ e $z' = z$. Em particular, isso significa que essas medidas não precisam ser feitas de modo simultâneo em qualquer sistema inercial.

4.6 DILATAÇÃO DO TEMPO

Dois eventos, 1 e 2, acontecem na mesma posição espacial x' mas nos instantes de tempo t'_1 e t'_2 quando medidos por observadores em repouso no sistema S1. Ao intervalo de tempo $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$ chamaremos o INTERVALO DE TEMPO PRÓPRIO Δt_0 . Os mesmos eventos acontecerão, segundo os observadores de S, nos instantes de tempo

$$t_1 = \gamma(v) \left(t'_1 + \frac{vx'_1}{c^2} \right) \quad (4.26)$$

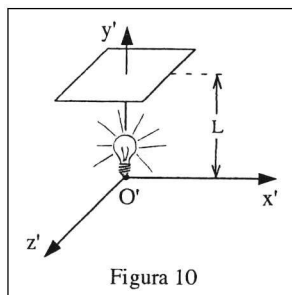
$$t_2 = \gamma(v) \left(t'_2 + \frac{vx'_2}{c^2} \right)$$

e portanto o intervalo de tempo, em S, entre os eventos 1 e 2 será

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(v) (t'_2 - t'_1) = \gamma(v) \Delta t_0 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.27)$$

Intervalos de tempo entre eventos que acontecem no mesmo lugar no sistema inercial S' são maiores quando medidos no sistema inercial S, em movimento em

relação a S', do que quando medidos em S',



Para entender melhor esse resultado e ressaltar o papel crucial da Constância da velocidade da luz construamos um relógio de luz em S' constituído por uma fonte de luz na origem O' e um espelho a uma distancia L da origem e perpendicular ao eixo O'y' (ver Fig. 10).

O intervalo de tempo necessário para que a luz vá ao espelho e volte refletida a origem O' é igual a

$$\Delta t_0 = \frac{2L}{c} . \quad (4.28)$$

O relógio pode exibir em um mostrador o valor do intervalo de tempo que a luz leva para ir ao espelho e voltar a origem O' e todos os observadores, em qualquer sistema, concordarão em dizer que um relógio em repouso no sistema S' marca o intervalo de tempo Δt_0 . Esses observadores podem também fazer medidas do intervalo de tempo que a luz leva para completar esse trajeto usando seus próprios relógios.

Os observadores do sistema S podem medir o tempo que a luz leva para ir da origem O' de S' até o espelho e voltar, usando um relógio em repouso em S. Eles o farão por meio de um conjunto de relógios em repouso e sincronizados em S, espalhados por todos os pontos de seu sistema inercial.

Ao ler qualquer um dos relógios de S estamos certos de que todos os relógios de S apresentam a mesma leitura. Lemos o relógio R₁ de S quando a luz é emitida da origem O' de S' e o relógio R₂ de S quando o pulso de luz retorna a origem O'. O intervalo de tempo deduzido dessas leituras é Δt . Na Fig. 11 vemos um caso em que o relógio de luz move-se com velocidade $v = c / 2$ e tem período próprio Δt_0 igual a 2,0 s. No sistema inercial S o período do relógio é de 2,3 s. Vejamos como isso é possível.

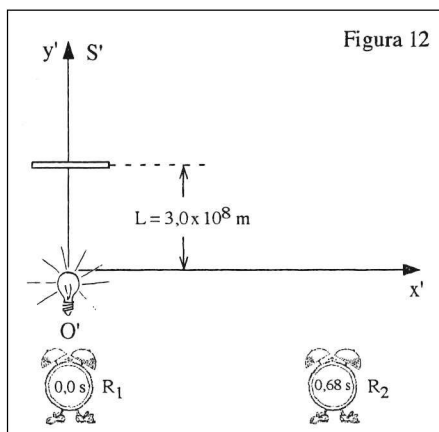
Como a luz propaga-se com velocidade c em todos os sistemas inerciais é preciso apenas descobrir qual o percurso percorrido pela luz segundo os observadores de S . Em S o aparato move-se uma distância $v \Delta t/2$ para a direita entre a emissão da luz e sua reflexão no espelho. Dai até sua volta a origem O' de S' o aparato move-se mais $v \Delta t/2$ para a direita. A situação é estritamente equivalente aquela encontrada na análise do experimento de Michelson - Morley (seção 3.1) e a distância percorrida pela luz em S é

$$\Delta \ell = 2 \sqrt{L^2 + \left(\frac{v \Delta t}{2} \right)^2} \quad (4.29)$$

O período de tempo Δt atribuído ao relógio em movimento pelos observadores de S pode ser encontrado a partir de

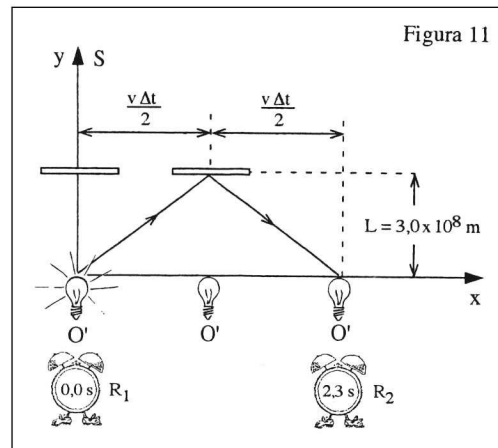
$$c \Delta t = \Delta \ell = 2 \sqrt{L^2 + \left(\frac{v \Delta t}{2} \right)^2} \Rightarrow \Delta t = \frac{2L}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.30)$$

O relógio em repouso em S' parecerá, para observadores em S , correr mais lentamente do que os relógios de S pois o tempo Δt_0 marcado por ele é menor do que o tempo Δt marcado pelos relógios de S^* .



Os observadores de S' interpretam tudo de modo diferente. Segundo eles os relógios de S estavam fora de sincronia (Fig. 12) e, portanto, é mais do que natural que as medidas feitas pelos observadores de S estejam em desacordo com suas próprias medidas. Quando a luz foi emitida pelo relógio de luz o relógio R_2 de S , responsável por marcar o tempo de retorno da

luz a origem O' de S' , já marcava 0,68 s.



* Um experimento divertido [J. C. Hafele, R. E. Keating, Science 177, 166 (1972)] levou dois relógios atômicos de Césio em vôos ao redor do mundo. Os resultados corrigidos para descontar efeitos da rotação da Terra e da relatividade geral estão em concordância com as previsões de dilatação temporal da relatividade restrita. Voar sempre para o leste retarda o envelhecimento em 59 ns por volta.

4.7 A LONGA VIDA DO MÉSON μ

Quando raios cósmicos — essencialmente prótons de altíssima energia — chegam a alta atmosfera terrestre criam-se os chamados chuueiros cósmicos. Grande parte das partículas nos chuueiros cósmicos são mésons π (píons), partículas instáveis que decaem em outras partículas chamadas mésons μ (mions ou muons). Os mésons μ , também são instáveis e decaem seguindo a lei de decaimento radioativo, $N(t) = N_0 \exp(-t \ln 2 / t_{1/2})$, sendo N_0 e N o número de mésons μ no tempo de sua produção e no tempo t , respectivamente. A constante $t_{1/2}$ é a meia-vida do méson μ , ou seja, é o tempo necessário para que a população de mésons μ seja reduzida pela metade. No sistema de repouso dos mésons μ sua meia-vida é de $3,1 \times 10^{-6}$ s.

Se montarmos detectores de mésons μ no topo de uma montanha de 5,0 km de altura e contarmos o número de mésons que viajam com velocidade $v = 0,98 c$ obteremos um número como 10^6 mésons μ em um certo intervalo de tempo. Nessa velocidade os mésons μ deveriam levar $1,7 \times 10^{-5}$ s (previsão não - relativística) para chegar ao nível do mar e apenas $2,2 \times 10^4$ mésons μ deveriam ser detectados lá. Todavia, o experimento mostra que $4,7 \times 10^5$ mésons μ são detectados ao nível do mar (21 vezes mais do que sugere a previsão não-relativística); a meia-vida do méson μ parece ser de $1,6 \times 10^{-5}$ s (5 vezes mais longa do que em repouso).

O tratamento relativístico mostra que, no sistema de repouso do méson μ a viagem não dura $\Delta t = 1,7 \times 10^{-5}$ s mas sim $\Delta t_0 = \Delta t / \gamma = 3,4 \times 10^{-6}$ s ($v = 0,98c \Rightarrow \gamma = 5$). Portanto, $4,7 \times 10^5$ mésons μ devem sobreviver a viagem. A dilatação temporal é essencial para entender a aparente vida longa do méson μ .

A viagem do méson μ também pode ser analisada por um observador solidário a partícula. Para ele, e para o méson μ , a distância do topo da montanha até os detectores ao nível do mar não será $L_0 = 5,0$ km mas apenas $L = L_0 / \gamma = 1,0$ km (para o méson μ a Terra vai a seu encontro a velocidade de $0,98 c$). A Terra, segundo o méson μ , intercepta o feixe de mésons em apenas $1,0 \text{ km} / 0,98 c = 3,4 \times 10^{-6}$ s. Portanto, $4,7 \times 10^5$ mésons μ devem sobreviver à viagem.

A vida do méson μ é um bom exemplo da realidade da dilatação temporal* e da contração do comprimento: não são truques feitos com espelho e um pouco de iluminação adequada. A análise, feita em dois sistemas inerciais distintos, mostra que em um desses sistemas o fenômeno consiste em mésons μ movendo-se com altíssima velocidade e sofrendo a dilatação temporal enquanto no outro sistema

* Observações de curvas de luz de supernovas velocísimas do tipo Ia são outro bom exemplo. O máximo de luminosidade das supernovas Ia velozes atrasa vários dias (sempre em acordo com a relatividade) em relação a suas semelhantes em repouso em relação à Terra. [B. Leibundgut et al., *Astrophys. J.* 466 L21 (1996).]

inercial tudo é explicado pela contração de comprimento de Lorentz - FitzGerald. Ambas as descrições estão de acordo com os resultados experimentais [B. Rossi, D.B. Hall, *Phys. Rev.* 59, 223 (1941)].

4.8 ABERRAÇÃO RELATIVÍSTICA DA LUZ ESTELAR

B

Discutimos na seção 3.2 a aberração da luz estelar como entendida em 1728 quando Bradley estudou cuidadosamente o fenômeno. Para observar uma estrela que esteja sobre nossas cabeças devemos inclinar o telescópio de um pequeno ângulo α . A discussão não-relativística permitiu concluir que

$$\alpha = \arctg(v/c) \cong 20,5'' \quad (4.31)$$

sendo v a velocidade da Terra em relação ao éter, representado pelo sistema inercial das estrelas fixas.

Suponha que no sistema S' , no qual a estrela está em repouso na origem, a luz seja emitida no instante t' na direção do eixo $O'z'$. A Terra está em repouso no sistema S , que viaja com velocidade $-\vec{v} = -v\vec{i}$ em relação a S' . A trajetória da luz em S é dada por

$$\begin{aligned} x &= \gamma(v)vt' \\ z &= z' = ct' \\ t &= \gamma(v)t' \end{aligned} \quad (4.32)$$

pois $x' = 0$.

O ângulo de inclinação do telescópica deve ser

$$\alpha = \arctg\left(\frac{x}{z}\right) = \arctg\left(\frac{\gamma(v)vt'}{ct'}\right) = \arctg\left(\gamma(v)\frac{v}{c}\right) \quad (4.33)$$

Tendo em vista que, para a Terra, $v/c \cong 10^{-4}$ torna-se muito difícil observar qualquer diferença entre a previsão relativística e sua antecessora. Desse modo, ambas concordam muito bem com os experimentos.

De modo geral é muito difícil observar efeitos relativísticos com as velocidades de nosso cotidiano (a velocidade orbital da Terra é de 30 km/s e isso produz um fator de Lorentz $\gamma(v)$ que é maior do que 1 por uma quantidade tão pequena quanto 5×10^{-9}).

4.9 EFEITO DOPPLER

Quando uma ambulância passa por nós em alta velocidade com sua sirena ligada percebemos que enquanto se aproxima de nós o som que dela ouvimos é mais agudo, tem maior frequência, do que quando se afasta. Esse fenômeno é conhecido como efeito Doppler e pode ser entendido com base nos movimentos da fonte de ondas, do receptor e do meio no qual são propagadas [v. H.M. Nussenzveig, "Curso de Física Básica", vol. 2, Edgard Bliicher (1996)]. É preciso levar em conta, porém, que boa parte do efeito que nossos ouvidos percebem com ambulâncias e ondas sonoras deve-se mais ao aumento da intensidade sonora, que nossos ouvidos interpretam também como aumento da frequência, do que ao efeito Doppler (percebemos o som da sirena de uma ambulância a 100 km/h apenas dois semitons acima da frequência emitida: Lá é percebido como Si e assim por diante.)

Uma das consequências mais interessantes do efeito Doppler com ondas que se propagam em um meio é a possibilidade de discernir entre um deslocamento de frequência causado pelo movimento da fonte em relação ao meio e um causado pelo movimento do receptor em relação ao meio ou ainda de um terceiro causado por uma combinação dos dois efeitos. O meio no qual se dá a propagação da onda desempenha um papel privilegiado, como o éter da física pré-relatividade.

Ondas de luz não precisam de um meio para propagar-se e podemos esperar, tendo em vista o Princípio da Relatividade, que o efeito Doppler assuma feições novas na relatividade de Einstein.

Uma fonte em repouso na origem O' do sistema S' emite pulsos de luz de modo periódico. Dois desses pulsos são emitidos, por exemplo, nos instantes de tempo $t' = 0$ e $t' = T_0$ e recebidos por um receptor em repouso na origem O do sistema S . O primeiro pulso é recebido no instante $t = 0$ e, segundo os observadores de S , as coordenadas da emissão do segundo pulso são

$$x = \gamma(v)(x' + vt') = \frac{vT_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (4.34)$$

$$t = \gamma(v)\left(t' + \frac{vx'}{c^2}\right) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

pois o segundo pulso é emitido em $x' = 0$, $t' = T_0$ segundo os observadores de S' .

Como o segundo pulso é emitido da posição $x = vT_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e propaga-se com velocidade c , levará um intervalo de tempo

$$\Delta t = \frac{vT_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (4.35)$$

para ser recebido na origem O de S. Portanto, o intervalo de tempo entre a recepção do primeiro pulso em $x = 0$ ($t = 0$) e a recepção do segundo pulso no mesmo ponto $x = 0$ vale

$$T = t + \Delta t = \frac{T_0 + vT_0/c}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = T_0 \left(\frac{1+v/c}{1-v/c} \right)^{1/2} \quad (4.36)$$

A frequência é o inverso do intervalo de tempo entre dois eventos sucessivos do mesmo tipo. Assim, em S', a frequência de emissão é $f_0 = 1/T_0$ e em S a frequência de recepção vale

$$f = \frac{1}{T} = f_0 \left(\frac{1-v/c}{1+v/c} \right)^{1/2} \quad (4.37)$$

Quando a fonte e o receptor aproximam-se a frequência f é maior do que a frequência f_0 e vice-versa. Não há como dizer qual dos dois está em movimento absoluto.

Além desse efeito Doppler, chamado longitudinal porque a linha que une a fonte e o receptor é paralela a velocidade relativa entre ambos, há também o efeito Doppler transversal, que é uma exclusividade da relatividade de Einstein.

No efeito Doppler transversal a linha que une a fonte e o receptor é perpendicular a velocidade relativa entre ambos e apenas a dilatação do tempo precisa ser levada em conta. Desse modo,

$$f = f_0 \sqrt{1-v^2/c^2} \quad (4.38)$$

Um experimento recente, baseado no efeito Doppler, é capaz de mostrar que é extremamente improvável que a noção de éter tenha qualquer consequência observável. O resultado do experimento estabelece que, em qualquer época do ano, a velocidade da Terra em relação a algum possível éter é de, no máximo 5 cm/s (G.R. Isaak, *Phys. Bull.* **21**, 255 (1970)). O efeito Doppler também é essencial ao funcionamento das experiências de resfriamento por laser de átomos neutros, capazes de produzir temperaturas tão baixas quanto 10^{-6} K (as palestras ministradas pelos agraciados com o premio Nobel de Física de 1997 quando do recebimento do premio tratam desse assunto: S. Chu, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 685 (1998);

C.N. Cohen-Tannoudji, *Rev. ModPhys.* 70, 707 (1998); W.D. Phillips, *Rev. Mod. Phys.* 70, 721 (1998)).

O efeito Doppler tem grande importância prática. Sua existência torna possível o uso de radares meteorológicos, que detectam a velocidade dos ventos dessa maneira, de radares de aviação e de trânsito. O sistema global de localização (Global Positioning System - GPS) baseado nos satélites de órbita não-geoestacionária da marinha dos Estados Unidos teria sua eficácia bastante reduzida sem o efeito Doppler. Até mesmo os satélites de telecomunicação em órbita geoestacionária teriam seu funcionamento e localização afetados caso seus projetistas desconhecêssem o efeito Doppler.

A luz emitida pelos diversos elementos e compostos químicos apresenta uma seqüência de linhas claras características de cada substância, seu espectro de emissão*. Quando o espectro da luz emitida por uma galáxia distante é analisado descobre-se que todas as linhas estão deslocadas para o vermelho (a frequência característica de cada linha é menor do que a frequência da mesma linha na Terra), indicando que a galáxia se afasta de nós. Em 1929, Hubble mostrou, após analisar uma enorme quantidade de espectros galácticos, que a velocidade de afastamento de cada galáxia em relação a Terra é proporcional a sua distância da Terra. Essa foi uma das primeiras evidências de que nosso Universo está em expansão, como previsto pela gravitação de Einstein.

4.10 PARADOXO DA CONTRAÇÃO DO COMPRIMENTO?

B

Uma barra "rígida" de 10cm de comprimento próprio move-se longitudinalmente sobre uma mesa horizontal. Em seu caminho há um buraco de 10cm de comprimento próprio coberto por um alçapão que pode ser removido rapidamente. Em relação a mesa a barra move-se com velocidade $v = \sqrt{15}c/4$, que produz um fator de Lorentz $\gamma = 4$.

Para os observadores fixos a mesa, do sistema inercial S, a barra tem apenas 2,5 cm de extensão e deve cair no buraco tão logo o alçapão seja retirado. Para os observadores de um sistema inercial S' que se mova com velocidade igual a da barra e o buraco que possui apenas 2,5 cm de extensão e, portanto, a barra não deve cair no buraco. Quem tem razão? As transformações de Lorentz devem responder.

* O espectro de uma substância é tão exclusivo de cada substância a ponto de haver permitido descobrir o elemento químico Hélio primeiramente no Sol, com base no espectro de luz solar, e só então na Terra. Técnicas de cromatografia são amplamente utilizadas na caracterização de substâncias químicas e são baseadas no espectro de linhas de cada substância.

Para evitar qualquer inclinação da barra em relação a mesa o alçapão só é retirado quando, para os observadores de S, toda a barra estiver sobre o buraco. Suponha que nesse exato momento as origens de S e S' coincidam e que $t = 0 = t'$. Para os observadores de S a extremidade traseira da barra tem seu movimento vertical descrito por

$$y=0 \quad , \quad t < 0 \quad (4.39)$$

$$y \cong -\frac{gt^2}{2} \quad , \quad t \geq 0$$

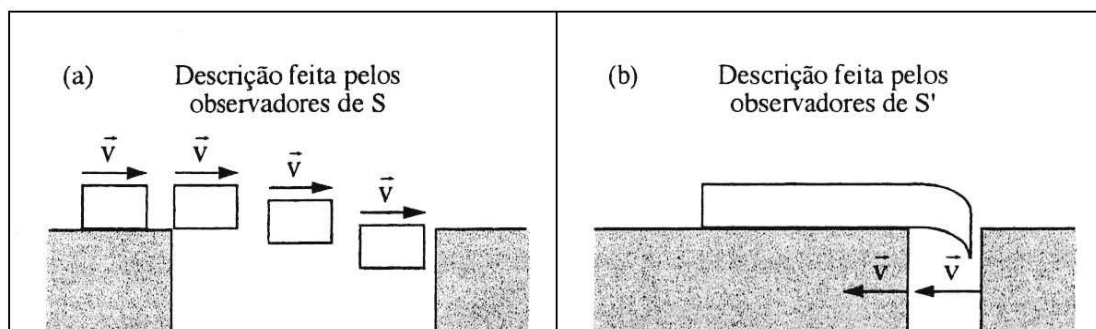
pois na relatividade uma força constante como a da gravidade produz aceleração quase constante quando a velocidade ainda é baixa. Para os observadores de S' o movimento vertical da extremidade traseira da barra é descrito por

$$y'=0 \quad , \quad t' < -x'v/c^2 \quad (4.40)$$

$$y' \cong -\frac{\gamma^2(v)g}{2} (t' + vx'/c^2)^2 \quad , \quad t' \geq -x'v/c^2 \quad ,$$

sendo x' a coordenada horizontal da extremidade traseira da barra*.

A interpretação desses resultados é simples: a extremidade traseira da barra segue uma trajetória parabólica e a barra é deformada, segundo os observadores de S'. Para os observadores de S a barra simplesmente cai, ao longo de uma parábola, sem ser deformada. Rigidez não é uma noção independente do sistema inercial. Nos dois casos, porém, a conclusão é a mesma, a barra cai (ver Fig. 13). Mais detalhes podem ser encontrados em W. Rindler, *Am. J. Phys.* 29, 365 (1961).



* Para encontrar as equações (4.40) lembre que $y' = y$ e que $t = \gamma(v) (t' + vx'/c^2)$. Encontrar o equivalente em S' das condições $t < 0$ e $t \geq 0$ é mais complicado: substitua $x = \gamma(v) (x' + vt')$ em $t' = \gamma(v) (t - vx/c^2)$ para encontrar $t' (1 + \gamma^2 v^2/c^2) = \gamma t - \gamma^2 vx'/c^2$; não é difícil mostrar que $1 + \gamma^2 v^2/c^2 = \gamma^2$ e que, portanto, $t' = t / \gamma - vx'/c^2$. Logo, $t / \gamma = t' + vx'/c^2$ e se $t < 0$ então $t' < -vx'/c^2$ e se $t \geq 0$ então $t' \geq -vx'/c^2$.

4.11 PARADOXO DOS GÊMEOS?

B

Dois irmãos gêmeos vivem em uma estação espacial em repouso no sistema inercial S . Um belo dia, um dos gêmeos entra em uma espaçonave e sai, Universo afora, retornando a estação após um intervalo de tempo Δt , medido pelo gêmeo que ficou na estação. O gêmeo que ficou na estação conhece o fenômeno de dilatação do tempo e sabe que para seu irmão na espaçonave passou-se um intervalo de tempo Δt_0 menor do que o intervalo de tempo Δt medido na estação. Quando se reencontrarem o gêmeo da espaçonave deverá ser menos velho do que o gêmeo que permaneceu na estação.

Todavia, pensa o gêmeo da espaçonave, quem está em movimento é o gêmeo da estação e portanto lá o intervalo de tempo tornado pela viagem será menor do que o intervalo de tempo medido aqui, na espaçonave. Quando os gêmeos se reencontrarem aquele que ficou na estação espacial deverá ser menos velho do que o gêmeo da espaçonave. Quem está com a razão?

Ambos os gêmeos parecem ter usado um raciocínio relativisticamente correto, lançando mão do Princípio da Relatividade e da dilatação do tempo mas obtendo resultados incompatíveis: paradoxo? Não!

Há um pequeno erro no raciocínio do gêmeo da espaçonave. Para poder retornar a estação espacial é preciso, em algum momento da viagem, inverter o sentido da velocidade da espaçonave. Tal procedimento produz conseqüências observáveis na espaçonave — objetos soltos chocar-se-ão contra as paredes da nave após um período de movimento acelerado, pêndulos em repouso começarão a oscilar e toda sorte de fenômenos estranhos, semelhantes aos que aconteceriam se uma força agisse sobre todos os objetos no interior da espaçonave, teria lugar — mas nada semelhante acontece na estação espacial. Portanto, o gêmeo da espaçonave não esteve, durante toda a viagem, em um sistema inercial e não pode usar o Princípio da Relatividade, que só garante equivalência das leis da natureza entre sistemas inerciais.

Concluimos que o gêmeo da estação espacial está correto e que viajar pelo espaço é um modo de reduzir o envelhecimento.

4.12 CAUSALIDADE E INVERSÃO DA ORDEM TEMPORAL DOS EVENTOS

A

Vimos, na seção 4.2, que dois eventos simultâneos em um sistema inercial não são necessariamente simultâneos em outros sistemas inerciais.

Será possível que os observadores de dois sistemas inerciais cheguem a discordar sobre a ordem temporal em que dois eventos acontecem?

Suponha que no sistema inercial S os eventos 1 e 2 tenham coordenadas espaçotemporais x_1, t_1 e x_2, t_2 e que $t_2 > t_1$, ou seja, que o evento 2 aconteça após o evento 1. No sistema S' o intervalo de tempo entre os dois eventos será

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma(v) \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right), \quad (4.41)$$

com $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ e $\Delta x = x_2 - x_1$.

Para que a ordem temporal entre os eventos seja invertida basta que a separação Δx entre eles seja maior do que $c^2 \Delta t / v$. Equivalentemente, basta que a velocidade v entre os sistemas inerciais satisfaça a desigualdade

$$v > c^2 \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (4.42)$$

Isso mostra que é impossível inverter a ordem temporal de dois eventos que não satisfaçam a desigualdade

$$\Delta x > c \Delta t, \quad (4.43)$$

pois v é necessariamente menor do que a velocidade da luz c^* . Em todos os outros casos é sempre possível encontrar um sistema inercial em que a ordem dos eventos seja invertida. Será possível que um efeito preceda sua própria causa?

Para que o evento 1 possa ser causa do evento 2 é preciso que alguma interação física, com origem no evento 1, propague-se até a posição x_2 antes do instante t_2 ou, no máximo, que atinja o ponto x_2 exatamente no instante t_2 , caso contrário é impossível que o evento 1 seja causa do evento 2. Nada se propaga com velocidade superior a velocidade da luz no vácuo e, portanto, é preciso que os eventos 1 e 2 satisfaçam

$$\Delta x \leq c \Delta t \quad (4.44)$$

para que o evento 1 possa ser causa do evento 2.

As condições (4.44) e (4.43) são claramente incompatíveis e a conclusão é expedita: só é possível inverter a ordem temporal de dois eventos que não possam manter uma relação de causa e efeito, ou seja, de dois eventos que acontecem em pontos tão distantes entre si que sequer a luz poderia sair de um deles e chegar ao outro evento antes que esse acontecesse. Isso não significa que os eventos 1 e 2 mantenham, realmente, uma relação causal.

* Se v fosse igual ou maior que c as transformações de Lorentz, a contração do comprimento e a dilatação do tempo deixariam de fazer sentido, produzindo infinitos ou números imaginários.

Um detalhe importante. Apenas a coordenada espacial ao longo da direção da velocidade relativa importa. Se dois eventos acontecerem sobre o eixo Oy do sistema S e estiverem muito afastados ($\Delta y > c \Delta t$) não será possível inverter a ordem temporal da seqüência de eventos com sistemas inerciais cuja velocidade relativa seja $\vec{v} = v \hat{i}$.

4.13 ADIÇÃO DE VELOCIDADES

A

Um objeto move-se com velocidade $\vec{u} = u_x \hat{i} + u_y \hat{j} + u_z \hat{k}$ em relação ao sistema inercial S. Qual sua velocidade $\vec{u}'$ em relação ao sistema inercial S', que se move com velocidade $\vec{v} = v \hat{i}$ em relação a S? A resposta galileana a essa pergunta não foi capaz de explicar o resultado do experimento de Michelson - Morley (seção 3.1) e ainda que a lei de adição de velocidades de Galileu seja simples e intuitiva devemos esperar que a lei de adição de velocidades de Einstein seja significativamente diferente para poder abrigar a contração do comprimento, a dilatação do tempo e a constância da velocidade *da luz*.

A forma mais simples e menos sujeita a erros de encontrar a velocidade $\vec{u}'$ é a diferenciação das transformações de Lorentz (4.16),

$$\begin{aligned} dt' &= \gamma(v) \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right) \\ dx' &= \gamma(v) (dx - v dt) \\ dy' &= dy \\ dz' &= dz \end{aligned} \tag{4.45}$$

seguida por

$$\begin{aligned} u'_x &= \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(v)(dx - v dt)}{\gamma(v) \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = \frac{dt}{dt} \frac{\left(\frac{dx}{dt} - v \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \\ u'_y &= \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\gamma(v) \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{\left(\frac{dy}{dt} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \\ u'_z &= \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\gamma(v) \left(dt - \frac{v}{c^2} dx \right)} = \frac{1}{\gamma(v)} \frac{\left(\frac{dz}{dt} \right)}{\left(1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt} \right)} \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}
 u'_x &= \frac{u_x - v}{\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \\
 u'_y &= \frac{u_y}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)} \\
 u'_z &= \frac{u_z}{\gamma(v) \left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}
 \end{aligned}
 \tag{4.46}$$

pois $u_x = dx / dt$, $u_y = dy / dt$ e $u_z = dz / dt$.

Quando as velocidades envolvidas são baixas em comparação com a velocidade da luz a lei de adição de velocidades é reduzida a seu similar galileano. Observe que, no que diz respeito às velocidades, as componentes perpendiculares a direção de $\vec{v} = v\hat{i}$ *também* são alteradas como consequência da transformação dos intervalos de tempo entre os sistemas *inerciais*.

A inversão das equações (4.46) pode ser realizada diretamente, com base no Princípio da Relatividade,

$$\begin{aligned}
 u_x &= \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} \\
 u_y &= \frac{u'_y}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} \\
 u_z &= \frac{u'_z}{\gamma(v) \left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)}
 \end{aligned}
 \tag{4.47}$$

Suponha que no sistema S' um pulso de luz seja emitido por uma fonte em $\mathcal{B}$ repouso. A velocidade do pulso, segundo os observadores de S', é $\vec{u}' = c\hat{i}$. Para os observadores de S a velocidade do pulso é $\vec{u} = u_x\hat{i}$ e u_x é dado por

$$u_x = \frac{u'_x + v}{\left(1 + \frac{vu'_x}{c^2}\right)} = \frac{c + v}{1 + \frac{vc}{c^2}} = \frac{c + v}{\frac{c + v}{c}} = c
 \tag{4.48}$$

O pulso de luz tem a mesma velocidade nos dois sistemas inerciais como reza a Lei de Propagação da Luz. A velocidade da luz é a maior velocidade possível para o

movimento de qualquer objeto.

Em 1964 um experimento conduzido no CERN (Laboratório Europeu para Física de Partículas), um gigantesco acelerador de partículas na Suíça, verificou esse resultado. Mesons π , produzidos pelo bombardeio de berílio por protons, com velocidade de $0,99975c$ emitem luz ao decair em mesons μ . A velocidade da luz produzida por essa fonte extremamente rápida foi medida no sistema de repouso do laboratório. Se o resultado do experimento for escrito como $c + kv$, com $v = 0,99975c$, descobre-se que $k = (0 \pm 1,3) \times 10^{-4}$. Portanto, a velocidade da luz é sempre c , independentemente do sistema inercial em que a medida é feita. O experimento é descrito em T. Alvager et al., *Phys. Lett.* **12**, 260(1964).

5.1 MOMENTO LINEAR

$\mathcal{A}$

Difícilmente as modificações conduzidas pela relatividade de Einstein sobre a cinemática - medidas de comprimento, de intervalo de tempo e de velocidade - não teriam contrapartida na dinâmica.

Nem sempre é simples descobrir quais grandezas terão utilidade na descrição da natureza. Há, no presente caso, dois marcos que são de utilidade: a conservação do momento linear (se o momento linear não pudesse ser conservado não teria valor) e o limite não-relativístico. Estudaremos um processo de colisão elástica entre duas partículas idênticas proposto por G.N.Lewis e R.C. Tolman em 1909 para descobrir as modificações no momento linear trazidas pela relatividade de Einstein.

No sistema inercial S a partícula 1 possui, inicialmente, velocidade $\vec{u}_1 = u_1 \hat{j}$. $\mathcal{B}$
No sistema S' a partícula 2 possui, inicialmente velocidade $\vec{u}_2 = -u_1 \hat{j}$. As Figs.

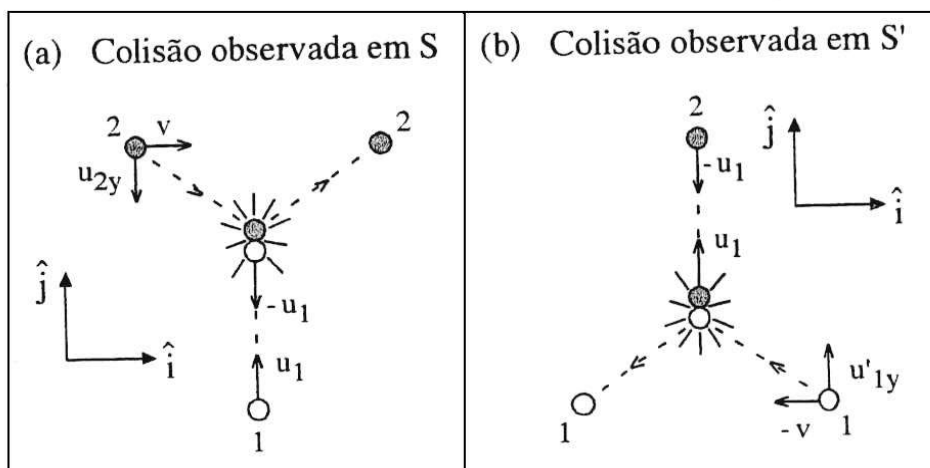


Figura 14

14a e 14b mostram a colisão como observada no sistema S e no sistema S', respectivamente.

As velocidades das duas partículas no sistema S, antes e depois da colisão são:

ANTES DA COLISÃO

DEPOIS DA COLISÃO

$$\vec{u}_1 = u_1 \hat{j}$$

$$\vec{u}_1 = -u_1 \hat{j}$$

$$\vec{u}_2 = v \hat{i} - \frac{u_1}{\gamma(v)} \hat{j}$$

$$\vec{u}_2 = v \hat{i} + \frac{u_1}{\gamma(v)} \hat{j}$$

(5.1)

Para calcular a velocidade da partícula 2 no sistema S basta transformar sua velocidade antes da colisão $\vec{u}'_2 = -u_1 \hat{j}$ e depois da colisão $\vec{u}'_2 = u_1 \hat{j}$ do sistema S', no qual são bem conhecidas, para o sistema S usando as equações (4.47). Note que o sistema S' move-se com velocidade $\vec{v} = v \hat{i}$ em relação ao sistema S.

Vamos supor que o momento linear seja dado pela expressão $\vec{p} = m(u) \vec{u}$, que se reduz a $m_0 \vec{u}$ quando $u/c \ll 1$. Aqui, m_0 é a massa atribuída a partícula quando em repouso, chamada a MASSA DE REPOUSO DA PARTICULA. Para que o momento linear seja conservado na colisão proposta por Lewis e Tolman e precise que

$$m(u_1)u_1 - m(u_2)\frac{u_1}{\gamma(v)} = -m(u_1)u_1 + m(u_2)\frac{u_1}{\gamma(v)} \quad (5.2)$$

pois a componente x do momento linear é automaticamente conservada. A equação (5.2) leva a

$$m(u_2) = \gamma(v) m(u_1) \quad (5.3)$$

que não é uma boa expressão para $m(u_2)$ por depender da velocidade v entre os sistemas inerciais e da velocidade u_1 da partícula 1.

Esse inconveniente é removido pela relação cinemática

$$\gamma(u_2) = \gamma(u_1) \gamma(v) \quad (5.4)$$

que é válida se $\vec{u}_1$ for perpendicular a $\vec{v}$. Assim,

* $\gamma(u_2) = \gamma(u_1) \gamma(v) \Leftrightarrow 1/\gamma^2(u_2) = 1/[\gamma(u_1) \gamma(v)]^2$ mas $1/\gamma^2(u_2) = 1 - u_2^2/c^2$ e como

$$\frac{m(u_2)}{\gamma(u_2)} = \frac{m(u_1)}{\gamma(u_1)} \quad (5.5)$$

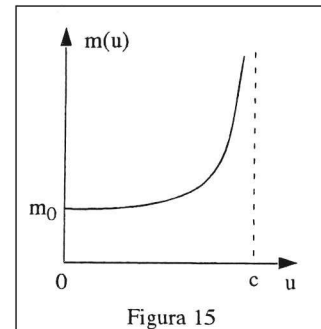
Em particular, se $u_1 = 0$, a equação (5.5) implica

$$\frac{m(u_2)}{\gamma(u_2)} = \frac{m(0)}{1} \Rightarrow m(u_2) = \gamma(u_2) m_0 \quad (5.6)$$

ou seja, em geral o momento linear de uma partícula de velocidade $\vec{u}$ é dado por

$$\vec{p} = m(u) \vec{u} = \gamma(u) m_0 \vec{u} \quad (5.7)$$

O fator $m(u) = \gamma(u) m_0$ é conhecido como MASSA RELATIVÍSTICA DA PARTÍCULA e é sempre maior do que sua massa de repouso, exceto quando $u = 0$ e $m(0) = m_0$. Quando a massa de uma partícula em movimento é medida o resultado é semelhante ao mostrado na Fig. 15. Note que quando $u \rightarrow c$ a massa $m(u) \rightarrow \infty$.



5.2 A 2ª LEI DE NEWTON

Na mecânica de Newton a expressão mais geral para a 2ª Lei de Newton é

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (5.8)$$

que continua válida na relatividade de Einstein desde que usemos o momento $\vec{p} = \gamma(u) m_0 \vec{u}$. Certamente a força $\vec{F}$ será alterada quando medida em outro sistema inercial mas a 2ª Lei de Newton manterá sua forma, $\vec{F}' = d\vec{p}'/dt'$.

Um caso simples de aplicação da 2ª Lei de Newton na relatividade é o de uma partícula de massa de repouso m_0 que parte do repouso no instante de tempo $t = 0$ e está submetida a força constante $\vec{F} = F_0 \hat{i}$. Como $d\vec{p}/dt = F_0 \hat{i}$ encontramos imediatamente que $\vec{p}(t) = F_0 t \hat{i}$. O momento linear é dado por $\vec{p} = \gamma(u) m_0 \vec{u}$ e, portanto,

$$\vec{u}_2 = v \hat{i} - \frac{u_1}{\gamma(v)} \hat{j}, \quad u_2^2 = v^2 + u_1^2 / \gamma^2(v) = v^2 + u_1^2 (1 - v^2 / c^2) \text{ e}$$

$$1 - u^2 / c^2 = 1 - v^2 / c^2 - u_1^2 / c^2 + v^2 u_1^2 / c^4 = (1 - u_1^2 / c^2) (1 - v^2 / c^2) = 1 [\gamma(u_1) \gamma(v)]^2.$$

Se $\vec{u}_1$ não fosse perpendicular a $\vec{v}$ a equação (5.4) seria generalizada para

$$\gamma(u_2) = \gamma(u_1) \gamma(v) \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{c^2} \right).$$

$$F_0 t = P x = \gamma(u) m_0 u = \frac{m_0 u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \Leftrightarrow \frac{u(t)}{c} = \frac{(F_0 t / m_0 c)}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_0 t}{m_0 c}\right)^2}} \quad (5.9)$$

Assim que a partícula é posta em movimento a quantidade $F_0 t / m_0 c$ ainda é muito menor do que 1 e $u(t) \cong F_0 t / m_0$ em um movimento quase uniformemente acelerado. Por outro lado, quando $F_0 t / m_0 c \gg 1$ a velocidade da partícula comporta-se como $u(t) \cong c - (c/2)(m_0 c / F_0 t)^2 < c$.

5.3 ENERGIA

$\mathcal{A}$

Devemos definir a energia de modo a satisfazer uma lei de conservação (seria inútil se não o fizesse) e a obter o limite não-relativístico correto, como fizemos na seção 5.1 para encontrar o momento linear.

Vamos supor que, em qualquer sistema inercial, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ durante um pequeno deslocamento $d\vec{r}$ da partícula seja igual a variação de sua energia cinética K

$$dK = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5.10)$$

Se substituirmos $d\vec{r}$ por $\vec{u} dt$ e $\vec{F}$ por $d\vec{p}/dt = d[\gamma(u)m_0\vec{u}]/dt$ encontraremos $\mathcal{B}$

$$dK = \vec{u} \frac{d}{dt} [\gamma(u)m_0\vec{u}] dt \quad (5.11)$$

que, para movimentos retilíneos, torna-se

$$\begin{aligned} dK &= u \frac{d}{dt} [\gamma(u)m_0 u] dt \\ &= m_0 u dt \frac{d}{dt} \left(\frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right) = m_0 u dt \frac{du}{dt} \frac{1}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \\ &= \frac{m_0 u du}{(1 - u^2/c^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Para encontrar a ENERGIA CINÉTICA K(u) basta integrar a equação (5.12) da velocidade $u = 0$ até a velocidade u, lembrando que $\mathcal{A}$

$$\int \frac{u}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} du = \frac{c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \text{constante},$$

$$K(u) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_0 c^2 = [\gamma(u) - 1] m_0 c^2 = m(u) c^2 - m_0 c^2 \quad (5.13)$$

É útil verificar que o limite não-relativístico é correto: quando $u / c \ll 1$

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \simeq 1 + \frac{u^2}{2c^2} \Rightarrow K(u) = m_0 c^2 \left(1 + \frac{u^2}{2c^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 u^2 \quad (5.14)$$

Já encontramos uma expressão adequada para a energia cinética mas não há lei de conservação da energia cinética. Como podemos definir a energia? Einstein respondeu a essa questão em outro artigo, também de 1905, publicado à página 639 dos *Annalen der Physik*. Segue seu argumento.

Considere uma onda eletromagnética (luz) que se mova na direção indicada pelo versor $\hat{i}$. Segundo o eletromagnetismo de Maxwell essa onda possui uma certa energia ε quando observada do sistema inercial S. Quando observada do sistema S' a energia da onda é ε'

$$\varepsilon' = \varepsilon \left(\frac{1-v/c}{1+v/c} \right)^{1/2} \quad (5.15)$$

Não é coincidência a semelhança entre a equação (5.15) e a (4.37), que trata do efeito Doppler (deslocamento da frequência f de ondas ou pulsos). De fato, no mesmo ano maravilhoso de 1905, Einstein havia mostrado que a hipótese de que a energia de uma onda luminosa fosse dada por $\varepsilon = nhf$ (h é uma constante conhecida como constante de Planck, que teve um papel importante na solução de outro mistério do final do século XIX, o espectro de emissão luminosa de uma fornalha, e ajudou a criar a mecânica quântica; seu valor é $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$) com $n \in \mathbb{N}$ era suficiente para resolver outro mistério da física do final do século XIX, o efeito fotoelétrico*. Conhecendo o efeito Doppler (sessão 4.9) e sendo um dos pais da sugestão de que $\varepsilon = nhf$ Einstein não teve dificuldade em calcular (5.15).

* Hertz descobriu que quando a luz incide sobre um metal são liberados elétrons dos átomos do metal. Curiosamente, o fenômeno acontece mesmo com baixíssimas intensidades luminosas (desde que a luz tenha frequência superior a uma certa frequência mínima) mas não acontece, não importando quão intensa seja a luz, se a frequência da luz for inferior à frequência mínima. Esse é o efeito fotoelétrico, que é explicado se a energia da luz for proporcional a sua frequência e não a intensidade (como propunha o eletromagnetismo de Maxwell). Essa explicação, dada por Einstein, lhe valeu o Prêmio Nobel de Física de 1921.

Se a energia de um corpo em repouso em S for E_0 , segundo os observadores de S, e E'_0 , segundo os observadores de S', e se esse corpo emitir um pulso de luz de energia $\varepsilon / 2$ na direção $\hat{i}$ e outro semelhante na direção $-\hat{i}$ os observadores de S concordarão que o corpo permanece em repouso. Após a emissão dos pulsos de luz a energia do corpo será E_1 , para os observadores de S, e E'_1 , para os de S'. A lei de conservação da energia exige que

$$E_0 = E_1 + 2(\varepsilon / 2) \quad (5.16)$$

$$E'_0 = E'_1 + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1-v/c}{1+v/c} \right)^{1/2} + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{1+v/c}{1-v/c} \right)^{1/2} = E'_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \quad (5.17)$$

A energia cinética inicial que o corpo tem no sistema S' e $K'_0 = E'_0 - E_0$ e a energia cinética final e $K'_1 = E'_1 - E_0$. Portanto, a diferença entre as energias cinéticas final e inicial é

$$K'_1 - K'_0 = \varepsilon \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) < 0 \quad (5.18)$$

A energia cinética do corpo diminui como resultado da emissão de radiação. Se $v/c \ll 1$ obtemos o resultado familiar

$$K'_0 - K'_1 \simeq \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{c^2} v^2, \quad (5.19)$$

que sugere que a massa de repouso do corpo é reduzida por uma quantidade $\Delta m = \varepsilon / c^2$. Vale a pena citar os últimos parágrafos do artigo de Einstein:

"Quando um corpo emite a energia e como radiação, sua massa é reduzida por ε / c^2 . Não faz diferença se a energia emitida pelo corpo é transformada em radiação e somos levados a conclusão mais geral de que:

A massa de um corpo e a medida de seu conteúdo energético; se a energia varia de ε sua massa varia de ε / c^2 .

Não é impossível que a teoria possa ser testada com sucesso em corpos cujo conteúdo energético seja muito variável como, por exemplo, os sais de rádio".

Desse modo a ENERGIA E de um corpo de massa de repouso m_0 é definida como

$$E = \gamma(u) m_0 c^2 = m(u) c^2 = K + m_0 c^2 \quad (5.20)$$

A

Em repouso esse corpo possui energia de repouso $m_0 c^2$.

A possibilidade de conversão entre massa e energia tem um enorme impacto sobre nossas vidas. A mais importante das fontes de energia do Sol (e das outras

estrelas) é a fusão nuclear de prótons para a formação de um núcleo de Hélio. No processo a diferença entre a massa do núcleo de Hélio e as massas dos dois prótons livres é transformada em energia e liberada sob a forma de radiação solar.

5.4 COLISÃO INELÁSTICA: UM EXEMPLO DA CONVERSÃO DE ENERGIA EM MASSA. A

Suponha que duas partículas idênticas, de massa de repouso m_0 , colidam e formem uma terceira partícula de massa de repouso M_0 , que esteja em repouso. O problema pode ser resolvido por meio das leis de conservação de momento linear e de energia:

$$\begin{aligned}\vec{p}_1 + \vec{p}_2 &= 0 \\ E_1 + E_2 &= M_0 c^2\end{aligned}\tag{5.21}$$

A primeira equação exige que $\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$ e, como ambas tem a mesma massa de repouso, as energias $E_1 = \gamma(u_1) m_0 c^2$ e $E_2 = \gamma(u_2) m_0 c^2$ são iguais. Assim, a massa de repouso M_0 da partícula resultante vale $M_0 = 2\gamma(u_2) m_0 c^2$, que é maior (por um fator $\gamma(u_1)$) do que a simples soma das massas de repouso das partículas iniciais ($2 m_0$). A massa extra, $2m_0(\gamma - 1)$, é construída a partir das energias cinéticas das partículas iniciais.

Um mecanismo semelhante a esse é usado nos aceleradores de partículas: partículas como prótons ou elétrons tem suas velocidades brutalmente aumentadas por combinações adequadas de campos elétricos e magnéticos e colidem com outras partículas. Uma parte da energia cinética é transformada em massa de repouso de outras partículas permitindo a criação de enormes jatos das mais diversas partículas. Rotineiramente, elétrons colidem com pósitrons (elétrons de carga positiva) e produzem partículas de massa de repouso 100.000 vezes superior a massa de repouso do próprio elétron. Toda essa massa extra vem da energia cinética inicial do elétron e do pósitron.

5.5 TRÊS IDENTIDADES ÚTEIS A

Há uma relação entre a energia $E = \gamma(u)m_0 c^2$, o momento linear $\vec{p} = \gamma(u)m_0 \vec{u}$ e a energia de repouso $m_0 c^2$ que é de grande utilidade:

$$E^2 - p^2 c^2 = (m_0 c^2)^2\tag{5.22}$$

Para demonstrá-la basta calcular

$$E^2 - p^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 - \gamma^2 m_0^2 c^2 = \gamma^2 m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = m_0^2 c^4 = (m_0 c^2)^2$$

Além disso, como $E = K + m_0 c^2$, a equação (5.22) pode ser reescrita como

$$p^2 c^2 = K^2 + 2 m_0 c^2 K \quad (5.23)$$

que também tem alguma utilidade.

Por fim, a divisão de (5.22) por $m_0^2 c^4$ leva a outra identidade útil,

$$\gamma^2(u) = 1 + \frac{u^2}{c^2} \gamma^2(u) \quad (5.24)$$

5.6 PARTÍCULAS DE MASSA NULA.

A

Que acontece com a energia e com o momento linear se $m_0 = 0$? A equação (5.22) diz que, nesse caso,

$$E = pc \quad (5.25)$$

e prevê que *partículas de massa nula podem ter tanto momento linear quanto energia*. Existem tais partículas sem massa?

Se a energia é dada por $E = m_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ e se, ao mesmo tempo, $m_0 = 0$ e $E \neq 0$, então é preciso que $u = c$. Desse modo $m_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$ é indeterminado e E pode ser diferente de zero.

Já conhecemos um fenômeno que é caracterizado pela velocidade da luz: a própria luz. A contribuição de Einstein ao efeito fotoelétrico (v. seção 5.3) permitiu que a luz fosse entendida como constituída de partículas, os FÓTONS (o nome foi dado por G. N. Lewis em 1926). As partículas que procuramos são essas.

Com o tempo outras partículas de massa nula foram descobertas e todas tem uma característica em comum: sempre movem-se com a velocidade da luz em todos os sistemas inerciais. Para nossos propósitos duas partículas sem massa são suficientes, o fóton e o neutrino, que aparece em vários processos de decaimento radiativo (recentemente mostrou-se que o neutrino tem uma pequena massa mas isso em pouco altera a maioria dos processos em que o neutrino atua.)

Portanto, partículas sem massa possuem tanto momento linear quanto energia (relacionados por $E = pc$) e movem-se sempre com a velocidade da luz (por isso as expressões $E = \gamma(u)m_0c^2$ e $\vec{p} = \gamma(u)m_0\vec{u}$ não fazem sentido, nesse caso).

5.7 UNIDADES

A

A massa de repouso do elétron é $m_0 = 9,11 \times 10^{-31}$ kg e sua energia de repouso é $m_0c^2 = 8,20 \times 10^{-14}$ J. Trabalhar com essas potências é pouco conveniente. É mais conveniente usar o elétron-volt (eV) e seus múltiplos. 1 eV é a energia adquirida por um elétron de carga $1,602 \times 10^{-19}$ C submetido a uma diferença de potencial elétrico de 1V,

$$1 \text{ eV} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Nessas unidades a energia de repouso do elétron vale 0,511 MeV e sua massa de repouso é dada por $m_0 = 0,511 \text{ MeV} / c^2$. É usual escrever a unidade de massa como

$$\frac{\text{MeV}}{c^2} = 1,782 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

Outra unidade bastante comum é a unidade de massa atômica (u). A unidade de massa atômica é a duodécima parte da massa de um átomo neutro do isótopo 12 de carbono (^{12}C) e vale

$$1 \text{ u} = 1,661 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

Por tanto, $1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV} / c^2$. A Tabela I traz as massas de repouso das partículas mais comuns [Particle Data Group, *Eur. Phys. J.* 15, 1 (2000)].

Partícula	Símbolo	Massa de repouso (MeV / c²)	Massa de repouso (u)
Fóton	γ	0 (< 2×10^{-16} eV)	0
Elétron	e	$0,510998902 \pm 0,000000021$	$(5,485799110 \pm 0,000000012) \times 10^{-4}$
Míon (Muon)	μ	$105,658357 \pm 0,000005$	$0,134289168 \pm 0,0000000034$
Neutrino	ν	< 3 eV	0
Próton	p	$938,27200 \pm 0,00004$	$1,00866491578 \pm 0,00000000055$
Nêutron	n	$939,56533 \pm 0,00004$	$1,00866491578 \pm 0,00000000055$

Os algarismos significativos da Tabela I são pequenos tributos a relatividade de Einstein. Se as previsões da relatividade não fossem diuturnamente

confirmadas nos experimentos mais variados e precisos tais algarismos não seriam obtidos.

Por fim, é costumeiro representar o momento linear em unidades de

$$\frac{MeV}{c} = 5,344 \times 10^{-22} \frac{kg \cdot m}{s}.$$

5.8 SISTEMAS LIGADOS

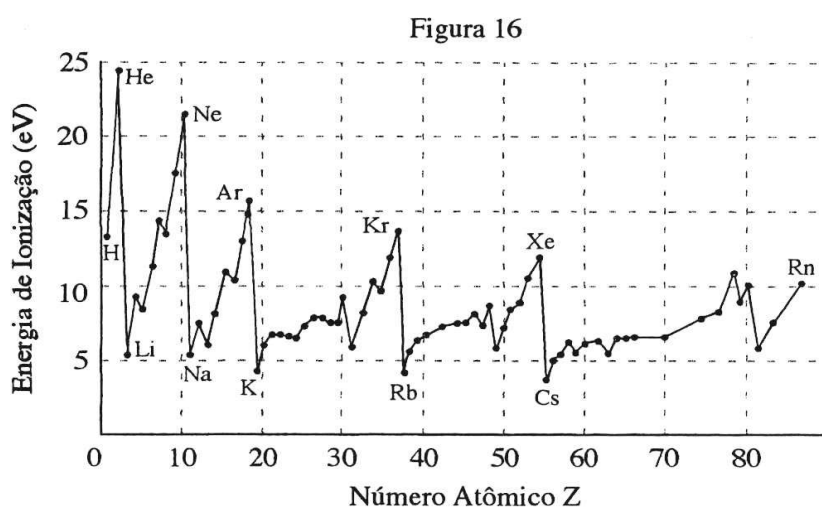
A

Poucos dos objetos com que nos deparamos em nossa vida podem ser ditos elementares como são - até onde sabemos - o elétron, o fóton e o neutrino. Em geral encontramos moléculas feitas de átomos e átomos compostos por prótons, nêutrons e elétrons. Mesmo prótons e nêutrons são partículas compostas por combinações de outras, chamadas quarks, que são elementares (até onde sabemos). Isso acontece porque as partes que compõem o sistema, que é chamado sistema ligado, são atraídas umas pelas outras por algum tipo de interação (galáxias e sistemas planetários são mantidos ligados pela força gravitacional, moléculas e átomos pela força eletromagnética, núcleos e nucleons - prótons e nêutrons - pela força nuclear forte).

Para desfazer um sistema ligado é preciso vencer as forças atrativas de ligação fornecendo energia. A quantidade de energia necessária para desligar um sistema é chamada energia de ligação pois essa é a energia que é emitida pelo sistema quando suas partes se combinam.

Assim, quando um elétron, de massa de repouso m_e , se junta a um próton, de massa de repouso m_p , para formar um átomo de Hidrogênio, de massa de repouso M_H , são liberados 13,6 eV. Para desfazer o átomo de Hidrogênio, ionizando-o, deve-se fornecer de volta os 13,6 eV. Todavia, a diferença entre a massa de repouso do átomo de Hidrogênio e a soma das massas de repouso do elétron e do próton separados é pequena demais para ser medida diretamente.

De modo geral, todas as diferenças de massa produzidas pela ligação de elétrons a núcleos para a formação de átomos ou de átomos a outros átomos para a formação de moléculas são muito pequenas para permitir sua medida direta. Já a energia irradiada é fácil de medir e pode ter consequências explosivas: toda a energia liberada por explosivos químicos vem da quebra de ligações moleculares. A explicação para essa aparente contradição é que uma variação de massa Δm quase imensurável libera uma enorme quantidade de energia Δmc^2 . A Fig. 16 traz a energia necessária para ionizar um elétron do átomo como função do número de prótons no núcleo. Observe que os elementos nobres (He, Ne, Ar, Kr, Xe, Rn) possuem as maiores energias de



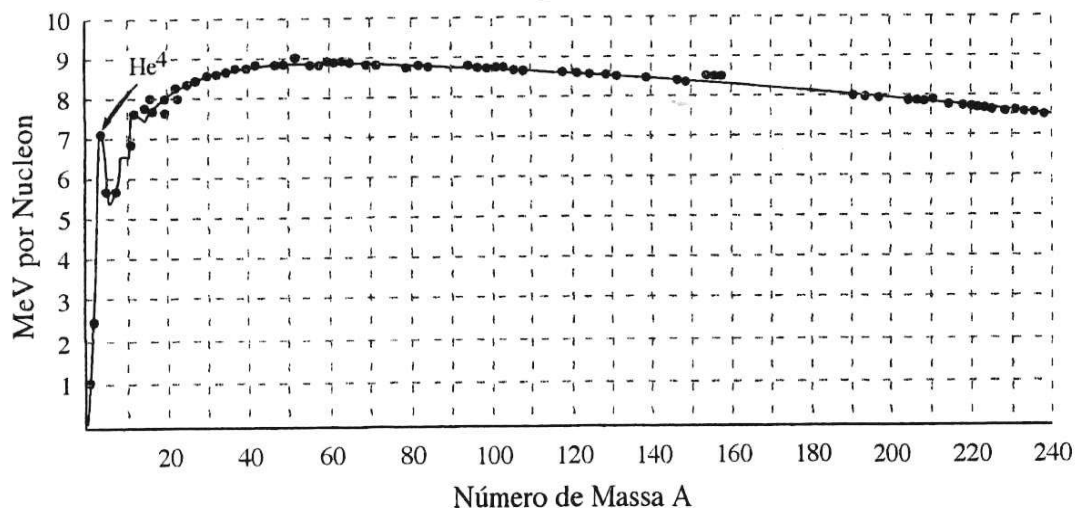
ionização. Como toda ligação química depende da troca ou do compartilhamento de elétrons com outros átomos entende-se o motivo pelo qual são raríssimos os compostos que envolvem tais elementos (recentemente alguns compostos envolvendo Xe e Rn foram observados com tempos de vida extremamente curtos.)

Quando um próton e um nêutron se juntam para formar um dêuteron (o núcleo de uma forma isotópica pesada de Hidrogênio) são liberados 2,226 MeV, equivalentes a energia de repouso de 4,36 elétrons. A diferença entre a massa do dêuteron e a soma das massas do próton e do nêutron é facilmente mensurada. No domínio das interações nucleares são liberadas grandes quantidades de energia.

A Fig. 17 mostra a energia de ligação dos núcleos atômicos por nucleon em função do número de núcleos. Os núcleos mais estáveis estão na vizinhança do Ferro. Para chegar a vizinhança do Ferro os núcleos podem quebrar-se (fissão nuclear) se tiverem mais núcleos do que o Ferro ou juntar-se (fusão nuclear) se tiverem menos núcleos do que o Ferro. A fissão é a responsável pela radioatividade natural de elementos químicos como Urânio, Plutônio ou Rádio e é usada em usinas nucleares para a

produção de energia (também foi usada nas primeiras bombas atômicas, que na verdade dever-se-iam chamar nucleares). A fusão é responsável pelo brilho das estrelas e pela produção de elementos pesados (nas estrelas). É possível que, algum dia, o processo de fusão possa ser usado para a produção de energia em usinas de fusão mas, por enquanto, apenas as bombas de Hidrogênio (detonadas por bombas atômicas de fissão) usam o mecanismo de fusão na face da Terra.

Figura 17



6. LEITURA ADICIONAL

A história da relatividade, do eletromagnetismo, do éter e de vários tópicos da física está nos dois volumes magistrais de E.T. Whittaker, "A History of the Theories of Aether and Electricity", Nelson, vol. 1, "The Classical Theories" (1951) e vol. 2, "The Modern Theories" (1953).

Um apanhado dos principais experimentos na origem da relatividade é feito por W.K.H. Panofsky, M. Phillips, "Classical Electricity and Magnetism", 2^ª ed., Addison-Wesley (1962).

Três bons textos sobre relatividade, em nível introdutório, estão em:

H.M. Nussenzveig, "Ótica, Relatividade, Física Quântica", (Curso de Física Básica, vol. 4), Edgard Blucher (1998);

C. Kittel, W.D. Knight, M.A. Ruderman, "Mecânica"(Curso de Física de Berkeley, vol. 1), Edgard Blucher (1986);

R.P. Feynman, R.B. Leighton, M. Sands, "The Feynman Lectures on Physics", vol. 1, Addison-Wesley (1963).

Alguns dos artigos originais de quatro dos primeiros relativistas estão reunidos (em inglês) em A. Einstein, H.A. Lorentz, H. Minkowski, H. Weyl, "The Principle of Relativity".

Encontrar informação relevante e confiável sobre relatividade na Internet não é uma tarefa simples. Todavia,

www.math.washington.edu/~hillman/relativity.html

traz uma boa coleção de recursos (principalmente sobre relatividade geral) e serve como ponto de partida para suas explorações. Nas páginas dos grandes aceleradores de partículas é possível encontrar material de boa qualidade sobre relatividade, mecânica quântica e até cosmologia. Ei-las:

CERN: www.cern.ch/public/science/welcome.html

SLAC: www2.slac.stanford.edu/vvc/home.html

FermiLab: www.fnal.gov/pub/hep/descript.html

Não deixe de visitar também <http://particleadventure.org> e visite interativamente os experimentos em execução no CERN em <http://vanh.physto.se/~hoc/>

Agradecimentos

É um prazer agradecer a Antonio José Roque, Ivette C. Oppenheim, Marcilei Guazzelli da Silveira, Paulo A. Nussenzveig e Maria de Lourdes Moraes pelas sugestões para a melhoria do texto e de sua apresentação e pelo incentivo para trazer a público este texto obscuro sobre um assunto radiante.